

整数アセットを考慮したネットワーク設計問題の MIP 探索法

片 山 直 登

1. はじめに

ネットワーク設計問題は、多品種のフローが流れるネットワーク上で、アーク（またはノード）にアセット（資源）を割り当てる問題である。ここでは、アークに整数個のアセット割り当てる整数アセットを考慮したネットワーク設計問題（IADP）を対象とする。

ノード集合を N 、アーク集合を A 、品種集合を K 、ノード n を終点とするアークの始点集合を N_n^+ 、ノード n を始点とするアークの終点集合を N_n^- とし、アーク (i, j) 上の品種 k の単位当たりのフロー費用を c_{ij}^k 、アーク (i, j) 上の単位当たりのアセット費用を f_{ij} 、単位当たりのアセット容量を b_{ij} とし、品種 k の需要量ノードを q^k 、 n が品種 k の始点であるとき -1 、終点であるとき 1 、それ以外は 0 である定数を d_n^k とする。さらに、品種 k がアーク (i, j) 上を流れる比率を表すアークフロー変数を x_{ij}^k 、アーク (i, j) 上に割り当てられるアセット数であるアセット変数を y_{ij} としたとき、整数変数 y を用いた IADP の定式化 IF は次のように表される (Frangionia and Gendron 2009)。

IF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} q^k x_{ij}^k \leq b_{ij} y_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$x_{ij}^k \leq y_{ij} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (5)$$

$$y_{ij} \in \text{INTEGER} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (6)$$

*IADP*において、アセットは輸送ネットワークでは、輸送便数、車両数、コンテナ数、ドライバなどに相当し、通信ネットワークでは回線容量やサーバ数などに相当する。アセット数の上限が1である場合は、容量制約をもつネットワーク設計問題となる。また、アーク上に割り当てられるアセット数が多い場合は、多数の整数変数をもつ混合整数計画問題となるため、規模が大きなインスタンスでは最適に解くことが困難となる（片山2020b）のみならず、線形緩和問題を最適に解くことも困難となる。

本研究では、*IADP*に対して、容量スケージング法、制限付きの分枝限定法およびMIP近傍探索法を組合せた近似解法を提案する。

2. 強い定式化

2.1 アークフローによる強い定式化

Magnanti et al. (1993) は、*IADP*に対する残余容量不等式を示している。残余容量不等式は単一のアークと品種の部分集合 $M \subseteq K$ に対して作成される。 $a_{ij}^M = (\sum_{k \in M} d^k) / b_{ij}$, $q_{ij}^M = \lceil a_{ij}^M \rceil$, $r_{ij}^M = a_{ij}^M - \lfloor a_{ij}^M \rfloor$ としたとき、次のように表される。

$$\sum_{k \in M} a_{ij}^M (1 - x_{ij}^k) \geq r_{ij}^M (q_{ij}^M - y_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A, M \subseteq K. \quad (7)$$

IF に残余容量不等式を加えた定式化を *IF*⁺ とおく。*IF*⁺ は、緩和問題、分枝限定法やその他の解法で有効な強い定式化となる。

一方、Croxton et al. (2003, 2007) は、次のような拡張変数を用いた強い定式化 *EF* を示している。

EF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (8)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (9)$$

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (10)$$

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (11)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (12)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (14)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (15)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (16)$$

ここで、 y_{ij}^s はアーク (i, j) 上に s 個のアセットが割り当てられるとき 1、そうでないとき 0 であるアセット変数であり、 u_{ij}^{ks} はアーク (i, j) 上の $s-1$ から s 個分のアセット容量の範囲内に流れるフローの比率を表すアセットフロー変数である。また、 S_{ij} はアーク (i, j) 上に割り当てられるアセット数の集合である。

定式化 IF^+ の線形緩和問題と EF の線形緩和問題の最適値が一致することが示されている (Frangionia and Gendron 2009)。

2. 2 パスフローによる強い定式化

品種 k の取りうるパス集合を P^k とし、品種 k がパス p 上を移動する比率を表すパスフロー変数を z_p^k とする。また、品種 k の始点を O^k 、品種 k の終点の D^k 、パス p にアーク (i, j) が含まれるとき 1、そうでないとき 0 を表す定数を δ_{ij}^p とする。このとき、パスフローによる強い定式化 PF は次のようになる。

PF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (17)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (18)$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k \leq \sum_{s \in S_{ij}^k} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (19)$$

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (20)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (21)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (22)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (23)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, k \in K \quad (24)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (25)$$

一般的に、(19)式には等式が用いられるが⁸、不等式に置き換えても等価な問題となる。

3. 線形緩和問題と行・列生成

3. 1 線形緩和問題と被約費用

線形緩和は、変数の0-1条件を線形緩和したものである。組合せ最適化問題や混合整数計画問題などでは、最適解や近似解を求める際には、緩和問題を作成し、その最適解とその目的関数値である下界値を求めることが行われる。緩和問題としては、0-1条件や整数条件を連続条件に緩和する線形緩和と、一部の制約条件に乗数をかけて目的関数に組み込むラグランジュ緩和が知られている。規模が大きなインスタンスでは、アークフローを用いた定式化 EF の緩和問題を最適に解くことが困難である (片山 2020b)。そこで、パスフローを用いた定式化 PF に対する線形緩和問題に対して、制約条件である行と変数である列を適時生成する行・生成法を示す。

定式化 PF において、アーク集合 A 、アセット集合 S 、パス集合 P 、品種集合 K が与えられたときに、アセット変数の0-1条件である(25)式を次のように線形緩和した問題 $PL(A, S, P, K)$ を考える。

$$0 \leq y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (26)$$

(18)式の品種 k に対する双対変数を λ^k 、(19)式のアーク (i, j) 、品種 k に対する非負の双対変数を μ_{ij}^k 、(20)式の右側の式のアーク (i, j) 、アセット s に対する非負の双対変数を ν_{ij}^k 、(20)式の左側の式のアーク (i, j) 、アセット s に対する非負の双対変数を ξ_{ij}^s 、(21)式のアーク (i, j) 、アセット s 、品種 k に対する非負の双対変数を π_{ij}^s 、(22)式のアーク (i, j) に対する非負の双対変数を ρ_{ij} とする。また、パスフロー変数 z に対する被約費用を σ_p^k 、アセットフロー変数 u に対する被約費用を τ_{ij}^{ks} 、アセット変数 y に対する被約費用を v_{ij}^s とする。このとき、被約費用は次のようになる。

$$\sigma_p^k = \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \left(q^k c_{ij}^k + \mu_{ij}^k \right) - \lambda^k \quad \forall p \in P^k, k \in K. \quad (27)$$

$$\tau_{ij}^{ks} = -\mu_{ij}^k + q^k \left(\xi_{ij}^s - \nu_{ij}^s \right) + \pi_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (28)$$

$$v_{ij}^s = s f_{ij}^s - q^k \left(\xi_{ij}^s - \nu_{ij}^s \right) - \sum_{k \in K} \pi_{ij}^{ks} + \rho_{ij} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (29)$$

3. 2 パスフロー変数の生成

$PL(A, S, P, K)$ を対象として, 列生成と行生成を用いた解法を示す. 生成する列はパスフロー変数 z , アセットフロー変数 u およびアセット変数 y のすべての変数とする. また, 生成する行は(18)式以外の制約式とする. なお, 生成されていない制約式に対する双対変数は存在しないため, これらの双対変数の値は0と仮定する.

現在, 品種 k の生成されているパス変数に対応するパス集合を \bar{P}^k , その和集合を \bar{P} とし, アーク (i, j) について生成されているアセット集合を \bar{S}_{ij} , その和集合を \bar{S} とする. また, 生成済みのアセット集合をもつアーク集合を \bar{A} とする. \bar{A} , \bar{P} , \bar{S} および K が与えられたとき, $PL(\bar{A}, \bar{P}, \bar{S}, K)$ が解かれ, 生成されている制約に対する双対変数の最適値が求められているものとする. このとき, 被約費用 σ が負であるパスが生成するパスフロー変数となる.

μ^k および λ が与えられたときに, σ の値が負となるパスフロー変数を見つけることは, 品種 k に関するアーク (i, j) の長さを $q^k c_{ij}^k + \mu_{ij}^k$ としたネットワーク上で, 始点 o と終点 d 間のパスの中で長さが λ^k 未満であるパスを求めることに相当する. μ^k は非負であることから, 効率的に最短経路を求めることができる. 品種 k のパスの中で長さが最小のパスを見つけたとき, その長さが λ^k 未満であれば新たに生成するパスが見つかったことになる. 一方, その長さが λ^k 以上であれば, 品種 k について被約費用が負であるパスが存在しないことになる.

μ^k と λ^k が与えられたとき, 品種 k ごとの価格付け問題である次のような最短経路問題 $SP^k(\mu^k, \lambda^k)$ を解き, 目的関数値が負となるものが生成するパスフロー変数となる.

$SP^k(\mu^k, \lambda^k)$:

$$\min \sum_{p \in P^k} \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \left(q^k c_{ij}^k + \mu_{ij}^k \right) z_p^k - \lambda^k \quad (30)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = 1, \quad (31)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \quad (32)$$

生成されていない(19)式に対して, μ^k は0となる. したがって, 初期パス集合は, アークの長さを $q^k c_{ij}^k$ としたネットワーク上の各品種の始点・終点間の最短パスとすることができる. 新たなパス変数 z が生成されたとき, これらを(18)式と(24)式に付加する. 続いて, \bar{P} を更新する.

3. 3 行生成とアセット・アセットフロー変数の生成

\bar{S} , \bar{A} および \bar{P} が与えられたときに $PL(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ を解き, アーク (i, j) 上のフロー

t_{ij} を求める。ここで、 $t_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p q^k z_p^k$ である。

続いて、次式を満たすアーク (i, j) 上のアセット数 s で、最小値である \hat{s}_{ij} を求める。

$$t_{ij} \leq s b_{ij} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (33)$$

このアーク (i, j) のアセット数が \hat{s}_{ij} 以下であるアセット変数 $y_{ij}^s (s=1, \dots, \hat{s}_{ij})$ の中で、被約費用 v_{ij}^s が負となるアセット変数を生成する。さらに、被約費用 τ_{ij}^{ks} が負となるアセットフロー変数を生成する。

続いて、(19)式から(25)式において、生成した変数に関連する未生成の制約式を生成する。(19)式から(22)式が生成済みであり、生成したアセットフロー変数が含まれていない場合はこれらの式に生成した変数を追加する。さらに、(18)式に生成した変数を追加する。

\bar{A} および \bar{S} を更新し、 $PL(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ を解き直す。パス生成と併せ、この操作を変数および制約式が生成されなくなるまで繰り返す。新たな制約式および変数が生成されなければ、解は制約条件を満たし、かつ被約費用が負の変数がないことから、 $PL(A, S, P, K)$ が最適に解けたことになる。なお、 $PL(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ は線形計画問題であるので、汎用の MIP ソルバーで解くことができる。

4. 容量スケールリング法

4. 1 容量スケールリング

$PL(A, S, P, K)$ の最適解を求めたのちに、 $PL(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ に対して容量スケールリングを適用する。容量スケールリング法では、容量を変化させながら $PL(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ を繰り返し解き、容量の収束値を求め、収束解から 0-1変数を導出する方法である (Katayama et al. 2009)。適時、列生成と行生成を用いて、 \bar{A} 、 \bar{P} 、 \bar{S} と関連する制約式を更新する。

現在のアセット容量を \bar{b} とし、初期値として $\bar{b} := b$ とする。アセット容量 \bar{b} が与えられたときの線形緩和問題 $PLC(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K)$ である $PLC(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \bar{b})$ は次のようになる。

$PLC(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \bar{b})$:

$$\min \sum_{(i,j) \in \bar{A}} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k \sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k + \sum_{(i,j) \in \bar{A}} \sum_{s \in \bar{S}_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (34)$$

subject to

$$\sum_{p \in \bar{P}^k} z_p^k = 1 \quad \forall k \in K \quad (35)$$

$$\sum_{p \in \bar{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in \bar{S}_{ij}^k} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in \bar{A}, \quad (36)$$

$$(s-1)\tilde{b}_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in \bar{K}_{ij}^s} q^k u_{ij}^{ks} \leq s\tilde{b}_{ij}y_{ij}^s \quad \forall s \in \bar{S}_{ij}, (i, j) \in \bar{A}, \quad (37)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in \bar{K}_{ij}^s, s \in \bar{S}_{ij}, (i, j) \in \bar{A}, \quad (38)$$

$$\sum_{s \in \bar{S}_{ij}} \frac{\tilde{b}_{ij}}{b_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in \bar{A}, \quad (39)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in \bar{K}_{ij}^s, s \in \bar{S}_{ij}, (i, j) \in \bar{A}, \quad (40)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in \bar{P}^k, k \in K \quad (41)$$

$$0 \leq y_{ij}^s \leq \frac{b_{ij}}{b_{ij}} \quad \forall s \in \bar{S}_{ij}, (i, j) \in \bar{A}. \quad (42)$$

$PLC(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \bar{b})$ におけるアセット変数の最適解を \bar{y} とする. 現在のアセット容量と当該アークにおけるアセット解を用いて, 次のようにアセット容量を更新する.

$$\tilde{b}_{ij} := \alpha \tilde{b}_{ij} \max_{s \in \bar{S}_{ij}} \bar{y}_{ij}^s + (1 - \alpha) \tilde{b}_{ij} \quad \forall (i, j) \in \bar{A}, \quad (43)$$

$$\tilde{b}_{ij} := \tilde{b}_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \setminus \bar{A}. \quad (44)$$

ここで, α ($0 < \alpha < 1$) はスケールリングパラメータである. (43)式は, 生成されているアセット変数をもつアークでは, アーク内で最大の値をもつアセット変数に合わせて, 当該アーク上のすべてのアセット容量を容量スケールリングすることを表す. また(44)式は, 生成されているアセット変数を持たないアークのアセット容量については容量スケールリングを行わないことを表す.

$PLC(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \bar{b})$ のアセット変数の解で, 0 に未収束である変数の数がある程度の数となったときに, 容量スケールリング法を停止し, 続く近似解法に移行する. なお, 収束判定は当該回における解のみで判断せず, 複数回の平均値を用いることにする. ここでは, 次のように指数平滑法を用いて, アセット変数値の推定値 \hat{y} を求め, \hat{y} の値により収束の判断を行う.

$$\hat{y}_{ij}^s := \beta \bar{y}_{ij}^s + (1 - \beta) \hat{y}_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (45)$$

ここで, β ($0 < \beta < 1$) は平滑化係数である.

容量スケールリングは少なくとも ITE_{min} 回は繰り返すものとし, 0 に収束していないアセット変数の個数の合計が終了判定基準 γ 以下になった場合に容量スケールリングは終了する. もし, γ 個以下にならない場合, 容量スケールリングは ITE_{max} 回で終了する. なお, $\hat{y}_{ij}^s < \varepsilon$ となった場合 0 に, $\hat{y}_{ij}^s > 1 - \varepsilon$ となった場合 1 に収束したと判定する. ここで, ε ($0 < \varepsilon < 0.5$) は収束判定基準である.

4. 2 列生成法の計算時間の短縮

大規模な *IADP* のインスタンスでは線形緩和問題を適切な時間内に最適解くことが困難である (片山 2020a). 前述の列生成法を用いても大きな計算時間が必要な場合があり, 加えて容量スケールリング法においても列生成法を行うため, さらに計算時間が必要となる. 列生成法と容量スケールリング法で求めた解は, 限定分枝法のための実行解の領域の制限に用いられる. このため, 列生成法と容量スケールリング法において, 必ずしも緩和問題の最適解を算出するまで行う必要はない. 加えて, 容量スケールリング法における列生成法も, 最適解を算出するまで行う必要はない.

そこで, 計算時間を短縮するために, 次のような制限を行う.

- ・ *PL* における列生成法の最大繰返し回数の設定
- ・ 容量スケールリングの最大繰返し回数の設定
- ・ *PLC* の各容量スケールリングにおける列生成法の最大繰返し回数の設定

これらの設定によって, 大幅に計算時間を短縮することが可能となる.

5. 制限付きの分枝限定法

容量スケールリング法により, 指数平滑によるアセット変数の推定値が 0 に収束していない変数の数が γ 以下となった場合, 制限付きの問題に対して分枝限定法 (片山 2017) を適用し, 計算時間の制限を設けて MIP ソルバーで実行可能解を求める.

容量スケールリング法終了時のアセット変数の推定値 \hat{y}_{ij}^s が 1 であれば適切な近似解でも 1 となる可能性が高く, 0 であれば 0 となる可能性が高いと考えられる. そこで, $PF(A, S, P, K)$ において, \hat{y}_{ij}^s が 1 に収束した場合は当該アセット変数を 1 に固定し, 0 に収束した場合は当該アセット変数を 0 に固定する. アセット変数が 0 または 1 に収束していない場合には, アセット変数の範囲は 0 または 1 のままとする. すなわち, $PF(A, S, P, K)$ に次の制約を追加した問題 $PF(A, S, P, K, \hat{y})$ を作成し, 問題の実行可能領域を制限し, 問題を縮小する.

$$y_{ij}^s = 0 \quad \text{if } \hat{y}_{ij}^s < \epsilon, \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (46)$$

$$y_{ij}^s = 1 \quad \text{if } \hat{y}_{ij}^s > 1 - \epsilon, \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (47)$$

実行可能領域が縮小された $PF(A, S, P, K, \hat{y})$ であっても, 最適解を求めるためにはパスを生成しながら分枝限定法などを行う必要があるため, 容易ではない. そこで, $\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, \bar{K}$ に限定した問題 $PF(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, \bar{K}, \hat{y})$ を, MIP ソルバーを用いて設定した計算時間 T_{mit} のもとで解き, 実行可能解 \bar{y} を求める. \bar{y} は定式化 PF の実行可能解となる. この方法を制限付きの分枝限定法とよぶ. この問題はアーク集合とパス集合が限定され, かつ変数と制約式に制限があることから, 比較的容易に解を求めることができる.

制限付きの分枝限定法により実行可能解が求められた場合, \bar{y} の値にアセット変数を

固定した EF を解く。これは、 $PF(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \hat{y})$ では、パスフロー変数が限定されているため、必ずしも \hat{y} に対する最適なフローを求めることができないためである。この問題は、0-1変数が固定されている多品種フロー問題となるため、容易に解くことができる。この解における EF の目的関数値は上界値となる。

一方、 $PF(\bar{A}, \bar{S}, \bar{P}, K, \hat{y})$ の実行可能解が求められない場合には、計算時間 T_{init} のもとで(46)式と(47)式を加えた EF を解く。実行可能解が得られた場合、解を \hat{y} とし、上界値を UB とする。それでも、実行可能解が求められない場合は、 $\hat{y} := \lfloor \hat{y} \rfloor$ とし、 $UB := \infty$ とする。

6. MIP 近傍探索法

得られた近似解に対して、MIP 近傍探索法 (片山 2017) を適用する。MIP 近傍探索法は、MIP ソルバーを用いて暫定解に関する近傍制約を付加した問題を繰り返し解く近似解法である。

前節で求めた近似解 \hat{y} を暫定解とし、定式化 EF を用いて暫定解の近傍を探索していく。

はじめに、 EF に次の制約式を追加する。

$$\sum_{(i,j) \in A | \hat{y}_{ij}^s = 1} \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq L - 1. \quad (48)$$

ここで、 L は暫定解 \hat{y} において値が 1 となるアセット変数の数である。(48)式は、暫定解において 1 であるアセット変数のうち少なくとも 1 つの変数の値を変更することを表しており、実行可能領域から暫定解を排除することができる。

続いて、 EF に次の M 近傍を与える制約式を追加する。

$$\sum_{(i,j) \in A | \hat{y}_{ij}^s = 1} \sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \geq L - M. \quad (49)$$

(49)式は、暫定解において 1 である区分デザイン変数の値を高々 M 個変更することを表す。 M は正の整数で近傍の範囲である。 M が大きければ、条件を付加した EF の実行可能領域は広くなるため、良い解を算出できる可能性があるが計算時間内で解を算出できない可能性が高くなる。一方、 M が小さければ実行可能領域は狭くなるため、相対的に短時間で実行可能解を探索できる可能性が高まることになる。

加えて、現在までの最良の上界値を UB とおき、次の式も追加する。

$$\Phi < UB. \quad (50)$$

(48)式と(50)式により探索済みの解および暫定解を排除し、解の循環を防ぐことができる。なお、現在までの最良値よりも良い上界値が存在しなければ、問題は実行不可能となり、手順を終了する。

以上の制約条件は、アセット数が0または1である問題では有効に機能するが、*IADP*のようにアセット数が整数である問題では0-1変数が膨大なものとなり、有効に機能しない場合がある。

そこで、 $S_{ij} = \{1, \dots, |S_{ij}|\}$ と置きかえ、すべてのアーク (i, j) に対して暫定解 \bar{y} におけるアセット数から高々1個のアセットの変更のみを許すという条件を付加し、問題を縮小する。

$$\bar{S}_{ij} = \{0, 1\} \quad \text{if } \sum_{s \in S_{ij}} \tilde{y}_{ij}^s = 0, \quad (51)$$

$$\bar{S}_{ij} = \{s-1, s, s+1\} \quad \text{if } \tilde{y}_{ij}^s = 1 \text{ and } s < |S_{ij}|, \quad (52)$$

$$\bar{S}_{ij} = \{|S_{ij}|-1, |S_{ij}|\} \quad \text{if } \tilde{y}_{ij}^s = 1 \text{ and } s = |S_{ij}|. \quad (53)$$

(51)式は、暫定解においてアセット変数が0であるアークでは、取りうるアセット数は0または1とすることを表す。(52)式は、アセット数が s であるアークでは、取りうるアセット数はその前後の $s-1$, s と $s+1$ とすることを表す。(53)式は、アセット数が $|S_{ij}|$ であるアークでは、取りうるアセット数は $|S_{ij}|-1$ と $|S_{ij}|$ とすることを表す。

制限時間 T_{mip} を設け、MIPソルバーを用いて *EF* に上記の制約式を付加した問題を解く。実行可能解が得られた場合は、改善された解が探索されたことになり、得られた解を新たな暫定解 \bar{y} とする。続いて、追加した制約式を削除して、更新された暫定解に対応する制約式を追加し、近傍探索を繰り返す。実行不可能であることが判明した場合は、 M 近傍において暫定解よりも良い解が無いと判断できたことになり、探索を終了する。

一方、計算時間内に暫定解より良い解を算出することができず、かつ実行不可能と判断できない場合がある。この場合には、 $M := \lfloor M/\zeta \rfloor$ として M を減少させ、探索範囲を縮小する。ここで、 $\zeta (>1)$ は M の変更基準である。これにより、計算時間内で実行可能解を算出できるまたは実行不可能と判断できる可能性が高まることになる。 $M > 0$ である間、同様の探索を繰り返す。

7. 数値実験

Crainic et al. (2001) が示した C 問題をもとに片山 (2020a) が数値実験用に作成したインスタンスを使用する。インスタンスは、2種類の容量レベル、ノード数、アーク数と品種数によって分類され、4クラス、4容量レベル、31インスタンスに対して、合計124インスタンスで構成される。3つの文字によって、同一の分類内のインスタンスの性質を区別する。容量レベルは1, 4, 8, 16に分類され、数値が大きいほどアセット容量が小さく、単位当たりのアセット費用が低いインスタンスとなる。また、 F は固定費用に対してフロー費用が相対的に高く、 V はフロー費用が相対的に低いインスタンス

である。Tは容量が相対的にきつく、Lは相対的に緩いインスタンスである。

数値実験で使用した設定した機器等は以下の通りである。

- ・使用 OS および言語：UBUNTU Ver.18, C++
- ・MIP ソルバー：Gurobi Ver.9
- ・CPU AMD Ryzen7 1800X 3.6GHz 8Cores, RAM64GByte

また、数値実験で使用した設定したパラメータは以下の通りである。

- ・容量スケールリングパラメータ α ：0.01~0.30
- ・平滑化係数 β ：0.5
- ・収束判定基準 ε ：0.01
- ・容量スケールリングの終了判定基準 γ ：100
- ・近傍 M ：10
- ・近傍 M の変更基準 ζ ：2
- ・計算時間 T_{init} ：300秒
- ・計算時間 T_{mip} ：50秒, 100秒, 200秒
- ・容量スケールリングの最大繰返し回数：5回
- ・PL における列生成法の最大繰返し回数：100回
- ・PLC の各容量スケールリングにおける列生成法の最大繰返し回数：50回

近似解の誤差を算出するために、MIP ソルバーである Gurobi により、定式化 EF を 30時間解いて下界値を算出し、同時に上界値も算出した。しかし、いくつかの400品種の問題では 30時間で実行可能解すら求めることができないため、計算時間を 100時間として、解き直した。

表の項目は次の通りである。

- ・GRB30h：30時間または 100時間の制限時間を設けて Gurobi により求めた上界値
- ・LB：30時間または 100時間の制限時間を設けて Gurobi により求めた下界値
- ・MIP50： $T_{mip}=50$ 秒
- ・MIP100： $T_{mip}=100$ 秒
- ・MIP200： $T_{mip}=200$ 秒
- ・MIP50B： $T_{mip}=50$ 秒，スケールリングパラメータをインスタンスごとにチューニングしたもの
- ・MIP100B： $T_{mip}=100$ 秒，スケールリングパラメータをインスタンスごとにチューニングしたもの
- ・MIP200B： $T_{mip}=200$ 秒，スケールリングパラメータをインスタンスごとにチューニングしたもの

表1に、各インスタンスのサイズを示す。インスタンス名は、ノード数、アーク数、品種数、費用特性、容量特性を表している。ノード数は20と30、アーク数は230から

700, 品種は40から400である. Binary Variables は総アセット数であり, 定式化における0-1変数の数に対応している. レベル1の総アセット数は366から1113, レベル16の総アセット数は4515から13484と膨大な数となっている. Continuous Variables は, アークフローを用いた強い定式化 EF における連続変数の総数である. レベル1の総変数は2万から72万, レベル16の総変数は18万から566万と大きな数となっている. 表2は, MIP50, MIP100およびMIP200で設定した用いた品種数ごとのスケーリングパラメータ α である. なお, COM は品種数である.

表3は, 解法, 容量レベルおよび品種数ごとの平均誤差である. 30時間の計算時間で上界値を算出できなかったため, 計算時間の上限を100時間として上界値を求めたインスタンスがあり, これらが含まれる誤差はカッコで表している. なお, Gurobi により得られた下界値を LB , 各解法で得られた上界値を UB としたとき, 誤差 (Gap) は次式で算出した.

$$Gap = \frac{UB - LB}{LB} .$$

GRB30hにおいて, 全体の平均誤差は3.37%であり, 容量レベル1のインスタンスでは平均誤差が2.75%, 容量レベル4では5.07%, 容量レベル8では3.72%, 容量レベル16では1.95%である. なお, 全体と容量レベル16の400品種には30時間で上界値を求められないインスタンスが含まれている. 平均誤差は容量レベル4が最も大きく, 容量レベル8, 容量レベル1の順となっている. また, 40品種の平均誤差は0.00%, 100品種では0.86%, 200品種では1.95%, 400品種では10.26%であり, 品種数とともに平均誤差は増加している. 特に, 400品種で容量レベル4と8では10%を超えており, 加えて容量レベル16では30時間でも実行可能解・上界値を算出できないインスタンスが存在している.

MIP50において, 全体の平均誤差は3.46%であり, 容量レベル1のインスタンスでは平均誤差が3.63%, 容量レベル4では4.63%, 容量レベル8では3.41%, 容量レベル16では2.18%である. 平均誤差は容量レベル4が最も大きく, 容量レベル1, 容量レベル8, 容量レベル16の順となっている. また, 40品種の平均誤差は0.00%, 100品種では0.93%, 200品種では2.40%であるが, 400品種では10.09%と大きい. GRB30hに比べて, MIP50の誤差は, 容量レベル1では0.87%劣るが, 容量レベル4では0.44%, 容量レベル8では0.31%優れている. また, 100品種では0.07%, 200品種では0.45%劣っている一方, 400品種では0.17%優れている.

MIP100において, 全体の平均誤差は3.38%であり, 容量レベル1のインスタンスでは平均誤差が3.51%, 容量レベル4では4.54%, 容量レベル8では3.35%, 容量レベル16では2.12%である. また, 40品種の平均誤差は0.00%, 100品種では0.89%, 200品種では2.25%であるが, 400品種では9.96%と大きい. MIP50と比べて, MIP100では全体として0.08%の改善がなされている.

MIP200において、全体の平均誤差は3.27%であり、容量レベル1のインスタンスでは平均誤差が3.41%、容量レベル4では4.43%、容量レベル8では3.23%、容量レベル16では2.02%である。また、40品種の平均誤差は0.00%、100品種では0.87%、200品種では2.08%であるが、400品種では9.73%と大きい。MIP50と比べて、MIP200では全体として0.19%の改善がなされている。また、GRB30hに比べると、MIP200の誤差は、容量レベル1では0.66%劣っているが、容量レベル4では0.64%、容量レベル8では0.49%優れている。また、100品種では0.01%、200品種では0.13%劣っているが、400品種では0.53%優れ、全体として0.10%優れた解を算出することができている。

MIP50B, MIP100B および MIP200B においても同様の傾向がみられる。MIP50Bの全体の平均誤差は3.19%、MIP100Bでは3.16%、MIP200Bでは3.10%となり、すべてでGRB30hより優れている。特に、MIP200Bでは、容量レベル1の平均誤差は0.36%劣っているものの、容量レベル4では0.83%、容量レベル8では0.61%、容量レベル16では0.01%、全体では0.27%優れている。また、100品種では同値、200品種では0.07%劣るが、400品種では1.13%も優れている。

GRB30hは容量レベル1の400品種で良い上界値を算出しているが、容量レベル4・8・16の400品種では良い上界値を算出することができていない。これは、容量レベル4・8・16の400品種では0-1変数の数が2700から13000個となり、分枝限定法で良い実行可能解を求めるのには限界があると考えられる。一方、MIP探索法では、0-1変数の数が多いインスタンスであっても優れた解を算出している。MIP探索法では、容量レベル1のインスタンスにおいて容量スケールリング法から得られる情報が最良の上界値とは遠く離れる場合があり、このような場合は良い解を算出することができていない。

400品種は他の品種数に比べて、誤差が大きくなっている。これは、計算時間を指定した分枝限定法による下界値を用いているため、400品種のインスタンスでは30時間では適切な下界値を算出できておらず、これらの下界値の最適値との差は大きなことも要因の一つである。

表4から表7は各容量レベルにおける下界値および各解法による上界値であり、表8から表11は各容量レベルにおける上界値と下界値の誤差である。ここでは、GRB30h, MIP50B, MIP100B および MIP200B の結果を示す。表8の容量レベル1では、MIP50B, MIP100B, MIP200B の順で誤差が小さくなるが、MIP近傍探索を50秒から100秒に増加した場合の改善率は0.10%であり、100秒から200秒に増加した場合の改善率は0.07%である。GRB30hと比べると、30/520/400/F/Tと30/700/400/F/Lのようなアセット費用が高いインスタンスで良い解を算出することができていない。これらインスタンスでは、容量スケールリングと制限つきの分枝限定法から得られた解が、GRB30hの解と大きく異なり、MIP探索法ではこの違いを是正することができなかつたためである。

表9の容量レベル4では、MIP近傍探索を50秒から100秒に増加した場合の改善率は

-0.05%であり、100秒から200秒に増加した場合の改善率は0.05%である。MIP50Bで30/700/400/V/Tのよい上界値が算出されたことが影響しており、これはMIP探索法で近傍において最もよい解に移動することが最終的な最良解に直結しない場合があることを示している。なお、GRB30hと比べると400品種で誤差の大幅に小さな良解を算出することでできている。

表10の容量レベル8では、MIP近傍探索を50秒から100秒に増加した場合の改善率は0.03%であり、100秒から200秒に増加した場合の改善率は0.05%である。GRB30hと比べると400品種で誤差の小さな良解を算出することでできている。

表11の容量レベル16では、MIP近傍探索を50秒から100秒に増加した場合の改善率は0.03%であり、100秒から200秒に増加した場合の改善率は0.07%である。GRB30hが400品種では30時間で解を算出できないインスタンスがあるのに比べ、すべてのインスタンスで適切な解を算出している。

表12は、解法、容量レベルおよび品種数ごとの平均計算時間である。ここで、GRB30h, MIP50B, MIP100BおよびMIP200Bの計算時間を示す。GRB30hでは、平均計算時間は63790秒であり、容量レベル1であっても10時間を超えている。容量レベル8, 容量レベル4, 容量レベル16の順で平均計算時間が大きくなり、容量レベル16では30/100時間の計算時間の上限に達するインスタンスが発生している。40品種の平均計算時間は5秒と極めて短い。しかし、100品種, 200品種と平均計算時間が大きくなり、400品種ではすべてのインスタンスで30時間の計算時間の上限に達している。

MIP50Bでは、容量レベル1と4の平均計算時間は1720秒と1539秒であるが、容量レベル8では1117秒、容量レベル16では553秒と短くなっている。なお、全体の平均計算時間は1232秒である。また、40品種では平均4秒と短かく、100品種では397秒、200品種では687秒となり、400品種では3687秒と非常に大きくなる。MIP100Bでは、容量レベル1と4の平均計算時間は1821秒と1674秒であるが、容量レベル8では1251秒、容量レベル16では700秒と短くなっている。なお、全体の平均計算時間は1362秒である。また、40品種では平均4秒、100品種では508秒、200品種では884秒となり、400品種では3879秒である。なお、MIP50Bとの差は130秒である。MIP200Bでは、容量レベル1と4の平均計算時間は2076秒と1948秒であるが、容量レベル8では1512秒、容量レベル16では1056秒となっている。なお、全体の平均計算時間は1648秒である。また、40品種では平均4秒、100品種では693秒、200品種では1199秒となり、400品種では4495秒である。なお、MIP100Bとの差は286秒である。MIP50B, MIP100BとMIP200Bの間で、計算時間にそれほど大きな差がないのは、大半の計算時間が、線形緩和問題における列生成法と容量スケージング法における列生成法に使われているためである。

表13から表16は、各容量レベルにおけるインスタンスごとの計算時間である。GRB30hにおいて、すべての容量レベルですべての400品種が計算時間の上限30時間である

108000秒に達している。また、200品種の多くのインスタンスも計算時間の上限に達している。特に、容量レベル16の4つのインスタンスでは、30時間で上界値を求めることができず、360000秒である100時間の計算時間の上限を設定することにより、かろうじて上界値を算出することができている。

8. おわりに

本研究では、整数アセットを考慮したネットワーク設計問題に対して、容量スケールリング法、制限付きの分枝限定法および MIP 近傍探索法を組合せた近似解法を提案した。また、列生成法における計算時間を短縮する方法も提案した。最後に、ベンチマーク問題に対して、MIP ソルバーとの比較を行った。提案した解法では、MIP ソルバーを同等または優れた近似解を相対的に短時間で算出することができることを示した。GRB30h と比べて、各 MIP 探索法の計算時間は非常に小さく、また容量レベル 1 以外では GRB30h よりも優れた解を算出することができている。このため、この数値実験においては、提案した近似解法は *IADP* に対して有効な解法であると考えられる。

本研究は科学研究費基盤研究 C（課題番号 17K01268）による成果の一部である。

参考文献

- Crainic, T.G., A. Frangioni, B. Gendron. 2001. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. *Discrete Applied Mathematics* **112** (1-3) 73-99.
- Croxton, K.L., B. Gendron, T.L. Magnanti. 2003. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science* **49** 1268-1273.
- Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2007. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research* **55** 146-157.
- Frangioni, A., B. Gendron. 2009. 0-1 reformulations of the multicommodity capacitated network design problem. *Discrete Applied Mathematics* **157** (6) 1229-1241.
- Katayama, N. 2017. A combined matheuristic for the piecewise linear multicommodity network flow problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* **34** (6). doi:10.1142/S0217595917500336.
- Katayama, N., M.Z. Chen, M. Kubo. 2009. A capacity scaling procedure for the multi-commodity capacitated network design problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **232** (2) 90-101.

- Magnanti, T. L., P. Mirchandani, R. Vachani. 1993. The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming* **60** 233-250.
- 片山直登. 2017. 容量制約をもつネットワーク設計問題に対する MIP 近傍探索法. 流通経済大学流通情報学部紀要 **22** (1) 1-18.
- 片山直登. 2020a. 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題のラグランジュ緩和. 流通経済大学流通情報学部紀要 **25** (1) 1-30.
- 片山直登. 2020b. 整数アセット・アセットバランス・非分割・入木・ホップ数を考慮したネットワーク設計モデル. 流通経済大学流通情報学部紀要 **24** (2) 1-32.

表 1 : Dimensions of Instances

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	Binary		Varibales		Continuous Variables			
	1	4	8	16	1	4	8	16
20/230/040/V/L	366	1222	2325	4528	23244	56628	99645	185562
20/230/040/V/T	375	1246	2393	4675	24200	59040	104920	196200
20/230/040/F/T	376	1208	2306	4515	24240	57520	101440	189800
20/230/200/V/L	376	1203	2300	4499	120800	286200	505600	945400
20/230/200/F/L	384	1247	2390	4676	122800	295400	524000	981200
20/230/200/V/T	370	1233	2363	4622	119800	292400	518400	970200
20/230/200/F/T	371	1199	2293	4485	119800	285400	504200	942600
20/300/040/V/L	454	1483	2846	5564	29680	70840	125360	234080
20/300/040/F/L	480	1567	2998	5846	30960	74440	131680	245600
20/300/040/V/T	476	1570	3000	5859	30800	74560	131760	246120
20/300/040/F/T	473	1560	2975	5810	30680	74160	130760	244160
20/300/200/V/L	490	1573	3011	5879	156800	373400	661000	1234600
20/300/200/F/L	469	1552	2978	5811	152200	368800	654000	1220600
20/300/200/V/T	478	1564	3000	5851	153800	371000	658200	1228400
20/300/200/F/T	473	1549	2963	5783	152800	368000	650800	1214800
30/520/100/V/L	835	2733	5219	10199	135300	325100	573700	1071700
30/520/100/F/L	847	2736	5225	10196	136300	325200	574100	1071200
30/520/100/V/T	853	2771	5279	10289	137200	329000	579800	1080800
30/520/100/F/T	839	2730	5198	10184	135600	324700	571500	1070100
30/520/400/V/L	846	2737	5237	10212	546400	1302800	2302800	4292800
30/520/400/F/L	841	2773	5286	10301	544400	1317200	2322400	4328400
30/520/400/V/T	837	2726	5206	10154	541200	1296800	2288800	4268000
30/520/400/F/T	828	2706	5172	10087	538400	1289600	2276000	4242000
30/700/100/V/L	1092	3582	6873	13436	177200	426200	755300	1411600
30/700/100/F/L	1090	3592	6899	13478	177000	427200	757900	1415800
30/700/100/V/T	1113	3646	6978	13643	180000	433300	766500	1433000
30/700/100/F/T	1125	3661	7013	13707	181100	434700	769900	1439300
30/700/400/V/L	1097	3610	6910	13480	712800	1718000	3038000	5666000
30/700/400/F/L	1101	3579	6847	13346	712000	1703200	3010400	5610000
30/700/400/V/T	1100	3590	6889	13445	711200	1707200	3026800	5649200
30/700/400/F/T	1113	3624	6910	13484	718400	1722800	3037200	5666800

表 2 : Scaling Parameter α

COM	MIP50				MIP100				MIP200			
	40	100	200	400	40	100	200	400	40	100	200	400
Level 1	0.11	0.11	0.22	0.22	0.27	0.27	0.26	0.11	0.27	0.27	0.24	0.23
Level 4	0.26	0.26	0.10	0.28	0.15	0.15	0.04	0.28	0.26	0.26	0.18	0.28
Level 8	0.10	0.10	0.16	0.23	0.04	0.04	0.22	0.23	0.07	0.07	0.24	0.22
Level 16	0.05	0.05	0.02	0.15	0.04	0.04	0.02	0.17	0.18	0.18	0.14	0.17

表 3 : Average Gaps for Categories

COM	GRB30h					MIP50				
	1	4	8	16	Ave	1	4	8	16	Ave
40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	0.99	1.28	0.75	0.41	0.86	1.11	1.31	0.81	0.49	0.93
200	0.00	3.70	2.38	1.71	1.95	0.11	4.30	2.85	2.35	2.40
400	9.67	14.65	11.28	(5.45)	(10.26)	12.84	12.33	9.55	5.62	10.09
AVE	2.75	5.07	3.72	(1.95)	(3.37)	3.63	4.63	3.41	2.18	3.46
COM	MIP100					MIP200				
	1	4	8	16	Ave	1	4	8	16	Ave
40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	1.04	1.26	0.79	0.45	0.89	1.00	1.26	0.79	0.41	0.87
200	0.06	4.01	2.73	2.20	2.25	0.00	3.81	2.55	1.96	2.08
400	12.51	12.33	9.44	5.55	9.96	12.21	12.09	9.17	5.44	9.73
AVE	3.51	4.54	3.35	2.12	3.38	3.41	4.43	3.23	2.02	3.27
COM	MIP50B					MIP100B				
	1	4	8	16	Ave	1	4	8	16	Ave
40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
100	1.04	1.26	0.79	0.44	0.88	1.00	1.26	0.79	0.43	0.87
200	0.01	3.93	2.67	2.09	2.18	0.06	3.79	2.57	1.98	2.10
400	11.67	11.25	8.90	5.39	9.30	11.24	11.56	8.90	5.38	9.27
AVE	3.28	4.24	3.19	2.04	3.19	3.18	4.29	3.16	2.01	3.16
COM	MIP200B									
	1	4	8	16	AVE					
40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00					
100	0.98	1.26	0.79	0.41	0.86					
200	0.00	3.70	2.46	1.93	2.02					
400	11.07	11.46	8.78	5.19	9.13					
AVE	3.11	4.24	3.11	1.94	3.10					

() : 100h を含む

表 4 : Results of Capacity Level 1

Problem	LB	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	621560	621560	621560	621560	621560
20/230/040/V/T	585739	585739	585739	585739	585739
20/230/040/F/T	1325275	1325275	1325275	1325275	1325275
20/230/200/V/L	330924	330924	330924	330924	330924
20/230/200/F/L	600554	600554	600554	602824	600554
20/230/200/V/T	357125	357125	357125	357125	357125
20/230/200/F/T	614208	614208	614208	614208	614208
20/300/040/V/L	685710	685710	685710	685710	685710
20/300/040/F/L	1321018	1321018	1321018	1321018	1321018
20/300/040/V/T	727598	727598	727598	727598	727598
20/300/040/F/T	1465541	1465541	1465541	1465541	1465541
20/300/200/V/L	307162	307162	307162	307162	307162
20/300/200/F/L	567560	567560	567560	567560	567560
20/300/200/V/T	306206	306206	306511	306511	306206
20/300/200/F/T	533271	533271	533271	533271	533271
30/520/100/V/L	167238	167238	167238	167238	167238
30/520/100/F/L	398913	398913	398913	398913	398913
30/520/100/V/T	162572	162572	162572	162572	162572
30/520/100/F/T	454689	472076	472908	472908	472076
30/520/400/V/L	413010	455020	458811	458811	458811
30/520/400/F/L	623193	671519	675017	675017	675017
30/520/400/V/T	429302	456889	458893	458893	458893
30/520/400/F/T	675766	741297	757561	757561	753763
30/700/100/V/L	156692	156692	156759	156692	156692
30/700/100/F/L	222059	222059	222059	222059	222059
30/700/100/V/T	149221	149221	149494	149221	149221
30/700/100/F/T	215010	223782	223723	223666	223666
30/700/400/V/L	368416	418346	422523	422523	422523
30/700/400/F/L	604509	644891	692766	671908	672363
30/700/400/V/T	348724	391879	396097	396097	392956
30/700/400/F/T	571602	632574	640840	640840	640840

表 5 : Results of Capacity Level 4

Problem	LB	GRB30h	MIP50B	MIP200B	MIP200B
20/230/040/V/L	445989	445989	445989	445989	445989
20/230/040/V/T	409195	409195	409195	409195	409195
20/230/040/F/T	785592	785592	785592	785592	785592
20/230/200/V/L	153655	156600	156751	156600	156600
20/230/200/F/L	238360	248363	250677	249295	248363
20/230/200/V/T	171706	171706	171706	171706	171706
20/230/200/F/T	250701	252999	252999	252999	252999
20/300/040/V/L	471430	471430	471430	471430	471430
20/300/040/F/L	735101	735101	735101	735101	735101
20/300/040/V/T	511671	511671	511671	511671	511671
20/300/040/F/T	827145	827145	827145	827145	827145
20/300/200/V/L	130819	139929	139929	139929	139929
20/300/200/F/L	210945	229654	229796	229654	229654
20/300/200/V/T	137114	137114	137961	137528	137114
20/300/200/F/T	205839	219750	219860	219750	219750
30/520/100/V/L	87699	87699	87699	87699	87699
30/520/100/F/L	168627	173090	173090	173090	173090
30/520/100/V/T	86975	86975	86975	86975	86975
30/520/100/F/T	200526	207730	207520	207520	207520
30/520/400/V/L	200118	218880	216733	216733	216318
30/520/400/F/L	284293	323279	321485	325822	325822
30/520/400/V/T	208661	233984	230769	230769	229584
30/520/400/F/T	294907	378254	326717	326717	326717
30/700/100/V/L	80380	80380	80380	80380	80380
30/700/100/F/L	107315	107315	107315	107315	107315
30/700/100/V/T	76875	76875	76875	76875	76875
30/700/100/F/T	106225	110434	110434	110434	110434
30/700/400/V/L	182651	215913	209019	209019	209019
30/700/400/F/L	256804	291265	284249	286267	286079
30/700/400/V/T	177961	196374	196043	196375	196375
30/700/400/F/T	255416	285465	285951	285951	285951

表 6 : Results of Capacity Level 8

Problem	LB	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	408623	408623	408623	408623	408623
20/230/040/V/T	373571	373571	373571	373571	373571
20/230/040/F/T	663220	663220	663220	663220	663220
20/230/200/V/L	117240	117240	117248	117248	117240
20/230/200/F/L	168074	176179	176764	176466	176466
20/230/200/V/T	129432	129432	129432	129432	129432
20/230/200/F/T	180111	182268	183157	183157	182268
20/300/040/V/L	428551	428551	428551	428551	428551
20/300/040/F/L	609755	609755	609755	609755	609755
20/300/040/V/T	464779	464779	464779	464779	464779
20/300/040/F/T	684366	684366	684366	684366	684366
20/300/200/V/L	101416	105545	106073	105734	105545
20/300/200/F/L	154844	164110	165150	165006	164769
20/300/200/V/T	100499	100499	100499	100499	100499
20/300/200/F/T	150288	154756	155159	154830	154830
30/520/100/V/L	67959	67959	67959	67959	67959
30/520/100/F/L	122289	125341	125336	125336	125336
30/520/100/V/T	67341	67341	67341	67341	67341
30/520/100/F/T	146560	151651	152188	152188	152188
30/520/400/V/L	155066	162520	162520	162520	162520
30/520/400/F/L	213774	239036	236320	236320	235584
30/520/400/V/T	161570	176100	175060	175060	174157
30/520/400/F/T	219550	242308	241033	241033	241033
30/700/100/V/L	61897	61897	61897	61897	61897
30/700/100/F/L	80662	80662	80662	80662	80662
30/700/100/V/T	59870	59870	59870	59870	59870
30/700/100/F/T	82528	82528	82528	82528	82528
30/700/400/V/L	140370	162386	156406	156406	156406
30/700/400/F/L	188404	220793	206726	206726	206726
30/700/400/V/T	138934	149432	149383	149383	149318
30/700/400/F/T	190019	216278	207198	207198	207198

表 7 : Results of Capacity Level 16

Problem	LB	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	390206	390206	390206	390206	390206
20/230/040/V/T	356018	356018	356018	356018	356018
20/230/040/F/T	599966	599966	599966	599966	599966
20/230/200/V/L	93472	93851	94029	94029	94029
20/230/200/F/L	134213	136596	136596	136596	136596
20/230/200/V/T	103278	103278	103278	103278	103278
20/230/200/F/T	140601	146093	147025	147025	146762
20/300/040/V/L	403006	403006	403006	403006	403006
20/300/040/F/L	533218	533218	533218	533218	533218
20/300/040/V/T	447251	447251	447251	447251	447251
20/300/040/F/T	585616	585616	585616	585616	585616
20/300/200/V/L	82284	83197	83203	83197	83197
20/300/200/F/L	124348	128933	130604	130213	130193
20/300/200/V/T	80820	80820	80973	80973	80820
20/300/200/F/T	116675	119955	120664	120041	120041
30/520/100/V/L	56035	56035	56035	56035	56035
30/520/100/F/L	96009	98181	98181	98368	98181
30/520/100/V/T	56199	56199	56199	56199	56199
30/520/100/F/T	113722	114842	115024	114842	114861
30/520/400/V/L	128093	130983	131175	131175	131095
30/520/400/F/L	174940	181456	183174	183553	182724
30/520/400/V/T	133990	140104	140253	139762	139572
30/520/400/F/T	180848	191674	192565	192565	191752
30/700/100/V/L	50238	50238	50238	50238	50238
30/700/100/F/L	63141	63141	63170	63141	63141
30/700/100/V/T	49694	49694	49694	49694	49694
30/700/100/F/T	64000	64000	64032	64020	64000
30/700/400/V/L	115839	124462	122814	122814	122814
30/700/400/F/L	153063	166755	165582	165582	165582
30/700/400/V/T	114718	120172	119826	119826	119393
30/700/400/F/T	153748	162801	163333	163333	163333

表 8 : Gaps Bounds of Capacity Level 1 (%)

Problem	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/F/L	0.00	0.00	0.38	0.00
20/230/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/V/T	0.00	0.10	0.10	0.00
20/300/200/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/T	3.82	4.01	4.01	3.82
30/520/400/V/L	10.17	11.09	11.09	11.09
30/520/400/F/L	7.75	8.32	8.32	8.32
30/520/400/V/T	6.43	6.89	6.89	6.89
30/520/400/F/T	9.70	12.10	12.10	11.54
30/700/100/V/L	0.00	0.04	0.00	0.00
30/700/100/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/V/T	0.00	0.18	0.00	0.00
30/700/100/F/T	4.08	4.05	4.03	4.03
30/700/400/V/L	13.55	14.69	14.69	14.69
30/700/400/F/L	6.68	14.60	11.15	11.22
30/700/400/V/T	12.37	13.58	13.58	12.68
30/700/400/F/T	10.67	12.11	12.11	12.11
Average	2.75	3.28	3.18	3.11

表 9 : Gaps Bounds of Capacity Level 4 (%)

Problem	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/V/L	1.92	2.01	1.92	1.92
20/230/200/F/L	4.20	5.17	4.59	4.20
20/230/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/F/T	0.92	0.92	0.92	0.92
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/V/L	6.96	6.96	6.96	6.96
20/300/200/F/L	8.87	8.94	8.87	8.87
20/300/200/V/T	0.00	0.62	0.30	0.00
20/300/200/F/T	6.76	6.81	6.76	6.76
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/L	2.65	2.65	2.65	2.65
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/T	3.59	3.49	3.49	3.49
30/520/400/V/L	9.38	8.30	8.30	8.10
30/520/400/F/L	13.71	13.08	14.61	14.61
30/520/400/V/T	12.14	10.60	10.60	10.03
30/520/400/F/T	28.26	10.79	10.79	10.79
30/700/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/T	3.96	3.96	3.96	3.96
30/700/400/V/L	18.21	14.44	14.44	14.44
30/700/400/F/L	13.42	10.69	11.47	11.40
30/700/400/V/T	10.35	10.16	10.35	10.35
30/700/400/F/T	11.76	11.96	11.96	11.96
Average	5.07	4.24	4.29	4.24

表10 : Gaps Bounds of Capacity Level 8 (%)

Problem	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/V/L	0.00	0.01	0.01	0.00
20/230/200/F/L	4.82	5.17	4.99	4.99
20/230/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/F/T	1.20	1.69	1.69	1.20
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/V/L	4.07	4.59	4.26	4.07
20/300/200/F/L	5.98	6.66	6.56	6.41
20/300/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/F/T	2.97	3.24	3.02	3.02
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/L	2.50	2.49	2.49	2.49
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/T	3.47	3.84	3.84	3.84
30/520/400/V/L	4.81	4.81	4.81	4.81
30/520/400/F/L	11.82	10.55	10.55	10.20
30/520/400/V/T	8.99	8.35	8.35	7.79
30/520/400/F/T	10.37	9.79	9.79	9.79
30/700/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/400/V/L	15.68	11.42	11.42	11.42
30/700/400/F/L	17.19	9.72	9.72	9.72
30/700/400/V/T	7.56	7.52	7.52	7.52
30/700/400/F/T	13.82	9.04	9.04	9.04
Average	3.72	3.19	3.16	3.11

表11 : Gaps Bounds of Capacity Level 16 (%)

Problem	GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/V/L	0.41	0.60	0.60	0.60
20/230/200/F/L	1.78	1.78	1.78	1.78
20/230/200/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/200/F/T	3.91	4.57	4.57	4.38
20/300/040/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/L	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/T	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/200/V/L	1.11	1.12	1.11	1.11
20/300/200/F/L	3.69	5.03	4.72	4.70
20/300/200/V/T	0.00	0.19	0.19	0.00
20/300/200/F/T	2.81	3.42	2.88	2.88
30/520/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/L	2.26	2.26	2.46	2.26
30/520/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/520/100/F/T	0.99	1.15	0.99	1.00
30/520/400/V/L	2.26	2.41	2.41	2.34
30/520/400/F/L	(3.72)	4.71	4.92	4.45
30/520/400/V/T	4.56	4.67	4.31	4.17
30/520/400/F/T	(5.99)	6.48	6.48	6.03
30/700/100/V/L	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/L	0.00	0.05	0.00	0.00
30/700/100/V/T	0.00	0.00	0.00	0.00
30/700/100/F/T	0.00	0.05	0.03	0.00
30/700/400/V/L	7.44	6.02	6.02	6.02
30/700/400/F/L	(8.95)	8.18	8.18	8.18
30/700/400/V/T	4.75	4.45	4.45	4.08
30/700/400/F/T	(5.89)	6.23	6.23	6.23
Average	(1.95)	2.04	2.01	1.94

() : 100h/100h を含む

表12 : Average Computation Time for Categories (Seconds)

COMM	GRB30h					MIP50B				
	1	4	8	16	AVE	1	4	8	16	AVE
40	4	2	4	8	5	6	2	4	5	4
100	48961	47879	41808	28929	41894	646	352	302	289	397
200	10250	88827	80208	83861	65787	803	900	616	429	687
400	108000	108000	108000	(234000)	(139500)	5211	4710	3407	1421	3687
AVE	43152	63150	59360	(89496)	(63790)	1720	1539	1117	553	1232
COMM	MIP100B					MIP200B				
	1	4	8	16	AVE	1	4	8	16	AVE
40	6	2	4	5	4	6	2	4	5	4
100	795	455	372	411	508	1027	687	506	537	689
200	895	1146	858	635	884	1126	1371	1177	1120	1199
400	5359	4883	3613	1662	3879	5886	5488	4175	2431	4495
AVE	1821	1674	1251	700	1362	2076	1948	1512	1056	1648

() : 100h を含む

表13 : Computation Times of Capacity Level 1 (seconds)

Problem	LB/GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	0	0	0	0
20/230/040/V/T	0	1	1	1
20/230/040/F/T	2	4	4	4
20/230/200/V/L	4534	729	829	1069
20/230/200/F/L	3418	970	827	1121
20/230/200/V/T	3464	722	800	1090
20/230/200/F/T	610	679	791	867
20/300/040/V/L	0	1	1	1
20/300/040/F/L	11	17	17	17
20/300/040/V/T	0	1	1	1
20/300/040/F/T	14	16	16	16
20/300/200/V/L	27021	946	1160	1331
20/300/200/F/L	16682	916	1097	1275
20/300/200/V/T	24221	761	816	1110
20/300/200/F/T	2051	704	845	1144
30/520/100/V/L	15635	445	634	896
30/520/100/F/L	8789	511	602	682
30/520/100/V/T	5156	278	379	580
30/520/100/F/T	108000	1054	1178	1472
30/520/400/V/L	108000	2787	3015	3382
30/520/400/F/L	108000	5744	6048	6426
30/520/400/V/T	108000	4225	4423	4829
30/520/400/F/T	108000	5396	5469	6015
30/700/100/V/L	22770	530	712	904
30/700/100/F/L	30827	634	778	984
30/700/100/V/T	92513	698	842	1146
30/700/100/F/T	108000	1020	1239	1556
30/700/400/V/L	108000	7101	7159	7675
30/700/400/F/L	108000	5516	5621	6370
30/700/400/V/T	108000	5089	5231	6036
30/700/400/F/T	108000	5826	5907	6358
Average	43152	1720	1821	2076

表14 : Computation Times of Capacity Level 4 (seconds)

Problem	LB/GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	2	1	1	1
20/230/040/V/T	1	1	1	1
20/230/040/F/T	1	1	1	1
20/230/200/V/L	108000	745	991	1237
20/230/200/F/L	108000	844	1436	1546
20/230/200/V/T	41878	577	696	927
20/230/200/F/T	108000	944	1116	1354
20/300/040/V/L	1	1	1	1
20/300/040/F/L	3	2	2	2
20/300/040/V/T	1	1	1	1
20/300/040/F/T	7	7	7	7
20/300/200/V/L	108000	807	983	1155
20/300/200/F/L	108000	1601	1810	2018
20/300/200/V/T	20735	470	771	1165
20/300/200/F/T	108000	1213	1366	1566
30/520/100/V/L	5188	254	345	535
30/520/100/F/L	108000	548	596	856
30/520/100/V/T	1167	169	234	334
30/520/100/F/T	108000	635	779	1041
30/520/400/V/L	108000	2096	2287	3180
30/520/400/F/L	108000	6623	7020	7336
30/520/400/V/T	108000	2966	2960	3751
30/520/400/F/T	108000	5404	5596	6023
30/700/100/V/L	1249	208	311	511
30/700/100/F/L	47403	410	463	763
30/700/100/V/T	4024	200	347	564
30/700/100/F/T	108000	393	567	893
30/700/400/V/L	108000	4682	4795	5246
30/700/400/F/L	108000	5548	5873	6679
30/700/400/V/T	108000	3883	4130	4628
30/700/400/F/T	108000	6480	6402	7063
Average	63150	1539	1674	1948

表15 : Computation Times of Capacity Level 8 (seconds)

Problem	LB/GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	3	1	1	1
20/230/040/V/T	2	1	1	1
20/230/040/F/T	4	3	3	3
20/230/200/V/L	87762	382	486	932
20/230/200/F/L	108000	568	880	1337
20/230/200/V/T	9137	389	547	811
20/230/200/F/T	108000	561	745	1227
20/300/040/V/L	2	2	2	2
20/300/040/F/L	10	9	9	9
20/300/040/V/T	2	2	2	2
20/300/040/F/T	8	9	9	9
20/300/200/V/L	108000	785	1062	1232
20/300/200/F/L	108000	1014	1367	1798
20/300/200/V/T	4769	477	463	763
20/300/200/F/T	108000	753	1317	1315
30/520/100/V/L	828	137	190	201
30/520/100/F/L	108000	411	605	836
30/520/100/V/T	115	27	27	27
30/520/100/F/T	108000	881	845	1034
30/520/400/V/L	108000	1096	1290	1696
30/520/400/F/L	108000	4049	4292	5058
30/520/400/V/T	108000	1496	1691	2690
30/520/400/F/T	108000	3901	4083	4492
30/700/100/V/L	436	131	127	134
30/700/100/F/L	29122	351	434	719
30/700/100/V/T	1095	182	267	396
30/700/100/F/T	86871	299	482	699
30/700/400/V/L	108000	2612	2813	3182
30/700/400/F/L	108000	6627	6937	7240
30/700/400/V/T	108000	2291	2404	2890
30/700/400/F/T	108000	5182	5390	5836
Average	59360	1117	1251	1502

表16 : Computation Times of Capacity Level 16 (seconds)

Problem	LB/GRB30h	MIP50B	MIP100B	MIP200B
20/230/040/V/L	4	2	2	2
20/230/040/V/T	6	4	4	4
20/230/040/F/T	7	4	5	5
20/230/200/V/L	108000	488	651	978
20/230/200/F/L	108000	417	593	993
20/230/200/V/T	11993	237	343	692
20/230/200/F/T	108000	682	931	1660
20/300/040/V/L	6	4	4	4
20/300/040/F/L	12	9	9	9
20/300/040/V/T	9	5	5	5
20/300/040/F/T	9	4	4	4
20/300/200/V/L	108000	329	561	879
20/300/200/F/L	108000	560	830	1679
20/300/200/V/T	10893	329	466	1072
20/300/200/F/T	108000	393	705	1010
30/520/100/V/L	769	146	234	266
30/520/100/F/L	108000	789	726	996
30/520/100/V/T	511	131	180	182
30/520/100/F/T	108000	355	683	947
30/520/400/V/L	108000	435	635	1642
30/520/400/F/L	(360000)	1499	1719	2963
30/520/400/V/T	108000	757	1260	1559
30/520/400/F/T	(360000)	1640	1849	3052
30/700/100/V/L	305	136	154	154
30/700/100/F/L	7728	302	401	701
30/700/100/V/T	407	185	273	388
30/700/100/F/T	5716	267	632	660
30/700/400/V/L	108000	1072	1291	1683
30/700/400/F/L	(360000)	2851	3028	3432
30/700/400/V/T	108000	1083	1278	2468
30/700/400/F/T	(360000)	2028	2238	2646
Average	(89496)	553	700	1056

() : 100h