

整数アセットを考慮したネットワーク設計問題の ラグランジュ緩和

片 山 直 登

1. 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題

ネットワーク設計問題は、多品種のフローが流れるネットワーク上で、アーク（またはノード）にアセット（資源）を割り当てる問題である。ここでは、アークに整数個のアセット割り当てる整数アセットを考慮したネットワーク設計問題(IADP)を対象とする。

ノード集合を N 、アーク集合を A 、品種集合を K 、アーク (i, j) 上に割り当てられるアセット数の集合を S_{ij} 、ノード n を終点とするアークの始点集合を N_n^+ 、ノード n を始点とするアークの終点集合を N_n^- とする。また、アーク (i, j) 上の品種 k の単位当たりのフロー費用を c_{ij}^k 、アーク (i, j) 上の単位当たりのアセット費用を f_{ij} 、単一のアセット容量を b_{ij} とし、品種 k の需要量を q^k とし、 n が品種 k の始点であるとき -1 、終点であるとき 1 、それ以外は 0 である定数を d_n^k とする。アーク (i, j) 上に s 個のアセットが割り当てられるとき 1 、そうでないとき 0 であるアセット変数を y_{ij}^s 、アーク (i, j) 上を流れる品種 k のフローの比率を表すアークフロー変数を x_{ij}^k 、アーク (i, j) 上の $s-1$ から s 個分のアセット容量の範囲内に流れるフローの比率を表す品種 k のアセットフロー変数を u_{ij}^{ks} とする。このとき、アークフローによる定式化 AF は次のようになる (Croxtton et al. 2003, 2007)。

AF :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (2)$$

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (6)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (7)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (8)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (9)$$

AF は混合整数計画問題であるため、大規模な問題を最適に解くことは困難である。最適に解くための一端として緩和問題を解き、問題の下界値を求めることが行われる。緩和問題としては、離散条件を線形条件に緩和する線形緩和と一部の制約条件を目的関数に組み込むラグランジュ緩和が知られている。本研究では、 $IADP$ に対する2つのラグランジュ緩和問題と解法を示す。さらに、数値実験により、2つのラグランジュ緩和問題、アークフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題およびパスフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題による下界値の比較を行う。

2. ラグランジュ緩和問題

2.1 フロー保存式のラグランジュ緩和

AF において、フロー保存式である(2)式をラグランジュ緩和した問題を示す。(2)式のノード n 、品種 k に対するラグランジュ乗数を v_n^k とおく。ラグランジュ乗数 v を用いて、(2)式をラグランジュ緩和した問題 $LF(v)$ は次のようになる (Frangionia and Gendron 2009, Gendron and Gouveia 2017)。

$$LF(v) : \quad \phi(v) = \min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} (q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s + \sum_{k \in K} (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k) \quad (10)$$

subject to

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (11)$$

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (12)$$

整数アセットを考慮したネットワーク設計問題のラグランジュ緩和

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (14)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (15)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (16)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (17)$$

ここで、 O^k は品種 k の始点、 D^k は品種 k の終点であり、 $\phi(v)$ は $LF(v)$ の最適値である。

ラグランジュ乗数 v が与えられたとき、目的関数の第3項は定数項となるため、 $LF(v)$ はアーク (i, j) ごとに独立した問題 $LF_{ij}(v)$ に分割することが^sできる。

$LF_{ij}(v)$:

$$\phi_{ij}(v) = \min \sum_{k \in K} \left(q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) x_{ij}^k + \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (18)$$

subject to

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, \quad (19)$$

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, \quad (20)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (21)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1, \quad (22)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (23)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad (24)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (25)$$

ここで、 $\phi_{ij}(v)$ は $LF_{ij}(v)$ の最適値である。

この緩和問題には $|S_{ij}|$ 個の0-1変数である y_{ij}^s が含まれている。(22)式より、 $|S_{ij}|$ 個の内の高々1個の y_{ij}^s が1をとることになる。そこで、アセット数が s であるアセット変数 y_{ij}^s について1、それ以外のアセット変数について0と固定した問題 LF_{ij}^s を考える。自動的に(21)式、(22)式と(25)式は満たされ、また(21)式よりアセット数が s 以外のアセット数 s' をもつアセットフロー変数 $u_{ij}^{ks'}$ は0となる。さらに、(19)式より x_{ij}^k と u_{ij}^{ks} は一致するので、 x_{ij}^k は u_{ij}^{ks} で置き換えることができる。

以上のことから、アセット数 s に関する問題 $LF_{ij}^s(v)$ は、次のように表すことができる。

$LF_{ij}^s(v)$:

$$\phi_{ij}^s(v) = \min \sum_{k \in K} \left(q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) u_{ij}^{ks} + s f_{ij} \quad (26)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij}, \quad (27)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K. \quad (28)$$

ここで、 $\phi_{ij}^s(v)$ は $LF_{ij}^s(v)$ の最適値である。

$LF_{ij}^s(v)$ は連続ナップサック問題となるので容易に解くことができる。ここで、 u_{ij}^{ks} に関する目的関数の係数と制約式の係数の比率を $h(k)$ とおく。

$$h(k) = \left(q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) / q^k \quad \forall k \in K. \quad (29)$$

$h(k)$ ($k \in K$) を昇順にソートして並べ替え、その順で品種に $m=1, \dots, |K|$ と番号を付け直す。この順において、 $h(m)$ が負で最大である品種の番号を \hat{m} とおく。

$$\hat{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } h(1) \geq 0 \\ m & \text{if } h(m) < 0 \text{ and } h(m+1) \geq 0 \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

また、 $\sum_{l=1}^m q^l < (s-1) b_{ij}$ を満たす最大の m を \bar{m} とする。

$$\bar{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } q^1 \geq (s-1) b_{ij} \\ m & \text{if } \sum_{l=1}^m q^l < (s-1) b_{ij} \\ & \text{and } \sum_{l=1}^{m+1} q^l \geq (s-1) b_{ij} \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (31)$$

さらに、 $\sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij}$ を満たす最大の m を \tilde{m} とする。

$$\tilde{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } q^1 \geq s b_{ij} \\ m & \text{if } \sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij} \\ & \text{and } \sum_{l=1}^{m+1} q^l \geq s b_{ij} \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

最後に、 m^* を次のようにおく。

$$m^* = \max \{ \bar{m}, \min(\hat{m}, \tilde{m}) \}. \quad (33)$$

このとき、 $LF_{ij}^s(v)$ におけるアセットフロー変数の最適解 \tilde{u} は次のようになる。

$$\tilde{u}_{ij}^{ms} = \begin{cases} 1 & \text{if } m \leq m^* \\ \left\{ (s-1) b_{ij} - \sum_{l=1}^{\bar{m}} q^l \right\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \bar{m} \\ \left(s b_{ij} - \sum_{l=1}^{\hat{m}} q^l \right) / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \hat{m} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \forall m = 1 \dots |K|. \quad (34)$$

また、最適値 $\phi_{ij}^s(v)$ は次のようになる。

整数アセットを考慮したネットワーク設計問題のラグランジュ緩和

$$\phi_{ij}^s(v) = \sum_{k \in K} \left(q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) \tilde{u}_{ij}^{ks} + s f_{ij}. \quad (35)$$

$\phi_{ij}(v)$ は $s \in S_{ij}$ の最適値 $\phi_{ij}^s(v)$ とすべての y_{ij}^s が 0 のときの最適値である 0 の中で最も小さい値となるので、次のようになる。

$$\phi_{ij}(v) = \min \left(0, \min_{s \in S_{ij}} \phi_{ij}^s(v) \right). \quad (36)$$

最終的に、 $LF(v)$ の最適値 $\phi(v)$ は次のようになる。

$$\phi(v) = \sum_{(i,j) \in A} \phi_{ij}(v) + \sum_{k \in K} \left(v_{D^k}^k - v_{O^k}^k \right). \quad (37)$$

$LF(v)$ におけるアセット変数 y の最適解 \hat{y} は次のようになる

$$\hat{y}_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{if } s = \arg \min_{l \in S_{ij}} \left\{ \phi_{ij}^l(v) = \min_{r \in S_{ij}} \phi_{ij}^r(v) \text{ and } \phi_{ij}^l(v) < 0 \right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (38)$$

なお、複数のアセットで $\phi_{ij}^s(v)$ の最小値が負で同値な場合があるため、最小の添え字のものだけを 1 としている。また、アセットフロー変数の最適解 \hat{u} は次のようになる。

$$\hat{u}_{ij}^{ks} = \tilde{u}_{ij}^{ks} \hat{y}_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (39)$$

$|S|$ を $|S_{ij}|$ の最大値としたとき、 $LF(v)$ を解くための計算量は $|A| \|S\| K \log |K|$ となる。

2. 2 接続式のラグランジュ緩和

AF において、アークフロー変数とアセットフロー変数の接続式である(3)式をラグランジュ緩和した緩和問題を示す。なお、(3)式は次のような不等式に置き換えることができる。

$$x_{ij}^k \leq \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (40)$$

(40)式のアーク (i, j) 、品種 k に対する非負のラグランジュ乗数を $w_{ij}^k (\geq 0)$ とおく。ラグランジュ乗数 w を用いて(40)式をラグランジュ緩和した問題 $LC(w)$ は、次のようになる。

$LC(w)$:

$$\omega(w) = \min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \left(q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k \right) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left(s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (41)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (42)$$

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (43)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (44)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (45)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (46)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in K \quad (47)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (48)$$

ここで、 $\omega(w)$ は $LC(w)$ の最適値である。

$LC(w)$ は独立したアーク x に関する問題 $LC^x(w)$ とアセットフロー u とアセット変数 y に関する問題 $LC^{uy}(w)$ に分離することができる。

$LC^x(w)$:

$$\min \sum_{k \in K} \left(q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k \right) x_{ij}^k \quad (49)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (50)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in K. \quad (51)$$

$LC^{uy}(w)$:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left(s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (52)$$

subject to

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (53)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (54)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (55)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (56)$$

さらに、 $LC^x(w)$ は品種 k ごとの独立した問題 $LC^{xk}(w)$ に分離できる。

$LC^{xk}(w)$:

$$\chi^k(w) = \min \left(q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k \right) x_{ij}^k \quad (57)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, \quad (58)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \quad (59)$$

ここで、 $\chi^k(w)$ は $LC^{xk}(w)$ の最適値である。

$LC^{xk}(w)$ はアーク (i, j) の長さを $q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k$ としたネットワーク上で、品種 k の最短経路を求める問題となる。 w_{ij}^k は非負であり、アークの長さも非負となるので、効率的に最短経路問題を解くことができる。

一方、 $LC^{wy}(w)$ はアーク (i, j) ごとの独立した問題 $LC_{ij}^{wy}(w)$ に分離できる。

$LC_{ij}^{wy}(w)$:

$$\psi_{ij}(w) = \min \sum_{s \in S_{ij}} \left(s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (60)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, \quad (61)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1, \quad (62)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (63)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (64)$$

ここで、 $\psi_{ij}(w)$ は $LC_{ij}^{wy}(w)$ の最適値である。

アセット変数の選択式である(62)式から、 $LC_{ij}^{wy}(w)$ では高々1つのアセット変数が1となる。アセット s に対する y_{ij}^s の値を1とおくと、これ以外のアセット変数の値は0となり、(61)式から関連するアセツフロー変数も0となる。このとき、アセット s に対する問題 $LC_{ij}^{wys}(w)$ は次のようになる。

$LC_{ij}^{wys}(w)$

$$\psi_{ij}^s(w) = \min s f_{ij} - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \quad (65)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij}, \quad (66)$$

$$0 \leq u_{ij}^{ks} \leq 1 \quad \forall k \in K. \quad (67)$$

ここで、 $\psi_{ij}^s(w)$ は $LC_{ij}^{wys}(w)$ の最適値である。

$LC_{ij}^{wys}(w)$ は、連続ナップサック問題となるので容易に解くことができる。この問題は $LF_{ij}^s(w)$ と同様な問題となるので、 $LC_{ij}^{wys}(w)$ におけるアセツフロー変数の最適解 \tilde{u} は次のようになる。

$$\tilde{u}_{ij}^{ms} = \begin{cases} 1 & \text{if } m \leq m^* \\ \{(s-1)b_{ij} - \sum_{l=1}^{\bar{m}} q^l\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \bar{m} \\ \{s b_{ij} - \sum_{l=1}^{\hat{m}} q^l\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \hat{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall m = 1 \cdots |K|. \quad (68)$$

ここで、 $w_{ij}^k (k \in K)$ を昇順にソートし、 \hat{m} はそれらの値が負で最大である m 、 $\bar{m} = \sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij}$ を満たす最大の m 、 \bar{m} は $\sum_{l=1}^m q^l < (s-1)b_{ij}$ を満たす最大の m であり、 $m^* = \max\{\bar{m}, \min(\hat{m}, \bar{m})\}$ である。

$LC_{ij}^{sys}(w)$ の最適値 ψ_{ij}^s は次のようになる。

$$\psi_{ij}^s = s f_{ij} - \sum_{k \in K} w_{ij}^k \tilde{u}_{ij}^{ks}. \quad (69)$$

また、 $LC_{ij}^{sys}(w)$ の最適解 $\psi_{ij}^s(w)$ は次のようになる。

$$\psi_{ij}(w) = \min \left(0, \min_{s \in S_{ij}} \psi_{ij}^s(w) \right). \quad (70)$$

最終的に、 $LC(w)$ の最適値 $w(w)$ は次のようになる。

$$\omega(w) = \sum_{(i,j) \in A} \psi_{ij}(w) + \sum_{k \in K} \chi^k(w). \quad (71)$$

なお、アセット変数 \hat{y} の最適解は次のようになる

$$\hat{y}_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{if } s = \arg \min_{l \in S_{ij}} \left\{ \psi_{ij}^l(v) = \min_{r \in S_{ij}} \psi_{ij}^r(v) \text{ and } \psi_{ij}^l(v) < 0 \right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (72)$$

また、アセットフロー変数の最適解 \hat{u} は次のようになる。

$$\hat{u}_{ij}^{ks} = \tilde{u}_{ij}^{ks} \hat{y}_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (73)$$

$|S|$ を $|S_{ij}|$ の最大値としたとき、 $LC(w)$ を解くための計算量は、 $|A| \|S\| K |\log|K| + |K| \|N\|^2$ となる。

2. 3 劣勾配法

ラグランジュ緩和問題におけるラグランジュ乗数を適切に設定する手法として、劣勾配法がある (Held et al. 1974)。これは、目的関数におけるラグランジュ緩和した制約式の値との差異である劣勾配を用いてラグランジュ乗数を変更し、適切な緩和解を求める方法である。

$LF(v)$ におけるラグランジュ乗数 v に対する劣勾配 π は次のようになる。

$$\pi_n^k = d_n^k - \sum_{n \in N_n^+} x_{in}^k + \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k \quad \forall n \in N, k \in K. \quad (74)$$

適当な初期値から始め、 v を次のように更新する.

$$v_n^k := v_n^k + \alpha \pi_n^k \quad \forall n \in N, k \in K. \quad (75)$$

ここで、 α はステップサイズであり、適当な上界値を UB 、下界値を LB として、 β を $(0, 2)$ のパラメータとしたとき、次のようになる.

$$\alpha = \frac{\beta(UB - LB)}{\sum_{k \in K} \sum_{n \in N} (\pi_n^k)^2}. \quad (76)$$

UB が最適値の場合、劣勾配法の繰り返しごとに最適値との距離が減少する. しかし、 UB が最適値でない場合は下界値との差が大きくなるため、ステップサイズが過大になってしまう. そのため、暫時、 β を減少させることが必要となる.

1回の繰り返しにおける劣勾配法の計算量は $|N||K|$ であり、劣勾配法の繰り返し回数を $|M|$ とする. $LF(v)$ を解くための計算量と合わせると、 $LF(v)$ の下界値を求めるための計算量は $|M||A||S||K| \log|K|$ となる.

一方、 $LC(w)$ におけるラグランジュ乗数 w に対する劣勾配 ρ は次のようになる.

$$\rho_{ij}^k = x_{ij}^k - \sum_{s \in S_{ij}^k} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (77)$$

適当な初期値から始め、 w を次のように更新する.

$$w_{ij}^k := w_{ij}^k + \alpha \rho_{ij}^k \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (78)$$

ここで、 α はステップサイズであり、次のようになる.

$$\alpha = \frac{\beta(UB - LB)}{\sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in A} (\rho_{ij}^k)^2}. \quad (79)$$

1回の繰り返しにおける劣勾配法の計算量は $|A||K|$ であり、 $LC(w)$ を解くための計算量と合わせると、 $LC(w)$ の下界値を求めるための計算量は $|M||K|(|A||S| \log|K| + |N|^2)$ となる.

2. 4 数値実験

数値実験により、 $IADP$ に対する2つのラグランジュ緩和問題に加え、アークフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題およびパスフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題による下界値の比較を行う.

数値計算のためのインスタンスは、Crainic et al. (2001) が示したC問題をもとに、Frangionia and Gendron (2009) が示したものと同一条件を用いて生成する. なお、これらのインスタンスは公開されていないために数値に若干の相違がある可能性がある. 各インスタンスは、Crainic et al. (2001) のにおけるC問題の容量レベルを4つの容量レベルに展開する. C問題における各インスタンスにおけるアーク (i, j) の容量を C_{ij} 、品種 k の需要量を d^k としたとき、容量レベル e を次のようにおく.

$$e = |A| \sum_{k \in K} d^k / \sum_{(i,j) \in A} C_{ij}. \quad (80)$$

$e=1$ のとき、アーク容量の平均値 $\sum_{(i,j) \in A} C_{ij} / |A|$ が総需要に一致する。 e が小さいときには緩い容量制約となり、 e が大きいときにはタイトな容量制約となる。 C問題の4クラス31インスタンスに対して、 $e=1, 4, 8, 16$ の4容量レベルの124インスタンスについて数値実験を行う。 Crainic et al. (2001) におけるアーク (i, j) の容量を C_{ij} とアーク費用を F_{ij} としたときにアセット容量 b_{ij} とアセット費用 f_{ij} を次のように設定する。

$$b_{ij} = \left\lfloor \frac{C_{ij}}{e} \right\rfloor, \quad f_{ij} = \left\lfloor \frac{F_{ij}}{e} \right\rfloor \quad \forall (i, j) \in A. \quad (81)$$

また、アーク (i, j) 上の最大アセット数 $|S_{ij}|$ は需要合計をアセット容量で割ったものを切り上げた値とする。

$$|S_{ij}| = \left\lceil \frac{\sum_{k \in K} q^k}{b_{ij}} \right\rceil \quad \forall (i, j) \in A. \quad (82)$$

インスタンスは、容量レベル、ノード数、アーク数と品種数によって分類される。 2つの文字によって、同一の分類内のインスタンスの性質を区別する。 Fは固定費用に対してフロー費用が相対的に高く、 Vはフロー費用が相対的に低いインスタンスである。 Tは容量が相対的にきつく、 Lは相対的に緩いインスタンスである。

数値実験で使用した設定した機器等は以下の通りである。

- ・使用 OS および言語：UBUNTU Ver.18, C++
- ・最適化ソルバー：Gurobi Ver.9
- ・CPU AMD Ryzen7 1800X 3.6GHz 8Cores, RAM64GByte

数値実験で使用した設定したパラメータは以下の通りである。

- ・劣勾配法の繰り返し回数：1000, 10000, 100000
- ・ β の初期値：品種数 40：1.00, それ以外：0.175
- ・ β の変更：1000回ごとに 0.95倍

上界値には、 AF を最適化ソルバーである Gurobi を用い、最大計算時間を 100時間として求めた上界値と MIP 近似解法 (片山 2020a) で求めた上界値の小さい方を用いた。

なお、 AF の線形緩和問題の最適双対解をラグランジュ乗数に用いると最適な下界値に近い値を求めることができる (Gendron and Gouveia 2017)。しかし、大規模なインスタンスにおける線形緩和問題を解くこと自体が膨大な計算時間を必要とする (片山 2020b)。 (5)式を取り除いた AF の線形緩和問題は極めて短時間で最適化ソルバーを用いて解くことができることから、ここではこの問題の最適双対解をラグランジュ乗数の初期値とする。

フロー保存式をラグランジュ緩和した問題 LF で劣勾配法の繰り返し回数を1000回、10000回、100000回とした結果をそれぞれ F 1000, F 0000, F 100000 (以下 LF) とする。

また、アークフロー変数とアセットフロー変数の接続式をラグランジュ緩和した問題 LC で劣勾配法の繰り返し回数を1000回, 10000回, 100000回とした結果をそれぞれ $C1000$, $C10000$, $C100000$ (以下 LC) とする. 比較のために, AF から(5)式を取り除いた弱い定式化に対する線形緩和問題を最適化ソルバーにより解いて求めた最適値 (LP-W), AF の線形緩和問題を最適化ソルバーにより最大30時間の計算時間で解いて求めた最適値 (LP-S), パスフローを用いた定式化の線形緩和問題を列生成法で解いて求めた最適値 (LP-P) と比較をする. これらの最適値はいずれも AF の下界値となる.

表1に, 緩和問題, 容量レベルと品種数ごとに集計した下界値の上界値との誤差 (Gap) を示す. なお, ラグランジュ緩和では LF と LC の結果を示す. また, 上界値を UB , 各緩和問題から得られた下界値を LB としたとき, 誤差を次式で算出した.

$$Gap = \frac{UB - LB}{LB}.$$

弱い定式化による下界値 LP-W では, 容量レベル1の平均誤差が 351.46%, 容量レベル4では116.82%, 容量レベル8では64.62%, 容量レベル16では33.85%であり, 全体の平均誤差は141.69%である. 容量レベル1においては下界値が上界値の4分1程度であり, レベル16でも誤差が30%以上と大きい.

LP-S と LP-P とそれらの線形緩和問題は等価な問題であり, 線形緩和問題の最適値は同値となる. LP-S では, 容量レベル1の平均誤差が8.17%, 容量レベル4では7.45%, 容量レベル8では5.46%, 容量レベル16では3.11%であり, 全体の平均誤差は6.05%である. また, 品種数40では0.64%, 品種数100では5.46%, 品種数200では7.85%, 品種数400では9.56%である. LP-P では, 容量レベル1の平均誤差が8.17%, 容量レベル4では7.45%, 容量レベル8では5.46%, 容量レベル16では3.02%であり, 全体の平均誤差は6.02%である. また, 品種数40では0.64%, 品種数100では5.46%, 品種数200では7.85%, 品種数400では9.48%である. LP-S では容量レベル16の400品種の問題で緩和の最適値を求めることができているインスタンスが存在するため, LP-P に比べて容量レベル16の400品種で誤差が0.35%悪化している. このように, $IADP$ は上界値と線形緩和問題による下界値の差である双対ギャップが大きくなることが確認でき, 下界値を用いる分枝限定法などの解法が有効に機能しないことが分かる.

一方, LF と AF の線形緩和問題における2つの最適な下界値も一致する (Frangionia and Gendron 2009) ことが示されている. LF において, 容量レベル1の平均誤差が8.21%, 容量レベル4では7.48%, 容量レベル8では5.48%, 容量レベル16では3.03%である. 全体の平均誤差は6.05%であり, LP-P と比べて0.03%大きい. また, 品種数40では0.64%, 品種数100では5.52%, 品種数200では7.86%, 品種数400では9.50%である. LC において, 容量レベル1の平均誤差が8.21%, 容量レベル4では7.46%, 容量レベル8では5.47%, 容量レベル16では3.02%である. 全体の平均誤差は6.04%であり, LP-P と比

べて0.02%大きい。また、品種数40では0.64%、品種数100では5.49%、品種数200では7.86%、品種数400では9.49%である。LP-Pと比べると、LFも0.01から0.04%、LCも0.01から0.04%誤差が大きい。これは、繰り返し回数の上限を定めた劣勾配法は近似解法であり、必ずしも最適な下界値を算出できないためである。

ラグランジュ緩和ではLFとLCでは、ほぼ同じ下界値が求められているが、LCの方が少し良い下界値を算出している。劣勾配法の繰り返し回数に加え、パラメータ β の初期値やその変更方法にも誤差が大きく影響される。一方、LFとLCのラグランジュ乗数の初期値にLP-Wによる最適双対変数を用いている。しかし、この初期値を用いる場合、劣勾配法の初期の繰り返しでは下界値が大きく減少し、数百回の繰り返しの後に上昇に転じることが多いことから、効果的な初期値とはなっていない。

劣勾配法の繰り返し回数を増加させれば誤差は小さくなるが、膨大な計算時間が必要となる。また、劣勾配法のパラメータ β とその変更方法によっても、得られる下界値が異なってくる。問題の最適値と下界値の最適値が一致すれば $\beta=1$ が最も適切であるが、得られている上界値と下界値の最適値の差が大きくなればなるほど β は小さい方が適切となる。このことから、パラメータの自動最適化が必要と考える。さらには、ラグランジュ乗数の数が多い場合では劣勾配法にかわる効率的な解法が必要である。

表2に、容量レベルと品種数ごとに集計した計算時間を示す。弱い定式化であるLP-Wでは平均計算時間が8秒であり、最大でも56秒と極めて短時間で下界値を算出しているが、前述のように誤差が非常に大きい。

強い定式化であるLP-Sでは容量レベル1の平均計算時間が46秒であり、短時間で下界値を算出している。容量レベルと品種数の増加に従って変数と制約式数が増加するために、計算時間が大きく増加する。全体の平均計算時間は8690秒、容量レベル4では4037秒、容量レベル8では10516秒、容量レベル16では20162秒である。なお、双対単体法で線形緩和問題を解いた場合、双対実行可能解が見つければ下界値が得られることから、双対実行可能解が見つかった後に計算を打ち切れれば、誤差は大きいより小さな計算時間で下界値を算出することができる。しかし、規模が大きなインスタンスでは、双対実行可能解を見つけるまでに大きな時間を要する場合がある。

LP-Pでは、容量レベル1の平均計算時間が9584秒と大きな計算時間を必要としているが、容量レベルと品種数の増加に従って計算時間は減少している。全体の平均計算時間は4341秒で、容量レベル4では3165秒、容量レベル8では2429秒、容量レベル16では2184秒である。容量レベル16の計算時間は、LP-Sの約1/10となっている。

LCとLFの平均計算時間は劣勾配法の繰り返し回数が10万回のものである。LFとLCでは、容量レベルと品種数の増加に従って計算時間が大きく増加している。これは、LFの計算量は $|M||A||S||K|\log|K|$ であり、LCの計算量は $|M||K|(|A||S|\log|K|+|N|^2)$ であり、アーク数、セグメント数や品種数等に比例するためである。なお、LC

よりも LF の計算時間は大きい。計算量からは、最短経路問題の分だけ LC よりも LF の計算時間が必要となると考えられるが、今回の数値実験ではソートにおいて LC よりも LF の方が計算時間を必要としたため、LF の方が全体としての計算時間が大きい。LF の平均計算時間は6632秒で、容量レベル 1 では1494秒、容量レベル4では4337秒、容量レベル 8 では7506秒、容量レベル 16では 13190秒である。40品種では平均 517秒、100品種では 3528秒、200品種では3418秒、400品種では18300秒である。一方、LC の平均計算時間は5244秒で、容量レベル1では1209秒、容量レベル4では3169秒、容量レベル 8 では5691秒、容量レベル16では10906秒である。40品種では平均439秒、100品種では 2992秒、200品種では2938秒、400品種では14005秒である。

表 3 は使用した上界値である。これらは、AF を最適化ソルバーである Gurobi を用い、最大計算時間を100時間として求めた上界値と MIP 近似解法で求めた上界値の小さい方である。今回使用した劣勾配法には適切な上界値が必要であり、上界値が悪い場合は解の収束が遅くなったり、適切な下界値に収束しない状況が発生する。

表 4、表 5 および表 6 は、容量レベル 1 のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表 5 において、LP-S と LP-P の全体の平均誤差はともに8.17%であり、緩和問題の最適値を求めることができている。しかし、誤差が8.17%もあり、分枝限定法などで最適解を求めることが難しい問題であることが再認識される。一方、F1000の平均誤差は10.51%、F10000では8.73%、F100000では8.21%と、劣勾配法の繰り返しとともに減少している。LP-P の平均誤差との差は、F1000では2.34%、F10000では0.56%、F100000では0.04%である。C1000の平均誤差は13.53%、C10000では8.83%、C100000では8.21%である。LP-P の平均誤差との差は、C1000では5.36%と大きく、C10000では0.66%、C100000では0.04%である。繰り返し回数1000回の誤差が大きいのは、適切なラグランジュ乗数の初期値と上界値が設定されていない場合では初期の繰り返しでは大きく下界値が減少し、その後の繰り返しとともに下界値が増加する傾向があるためである。加えて、LC ではラグランジュ乗数の数が多いために、下界値の減少が長く続くため、1000回では繰り返し回数が十分でないことを表している。

表 6 において、LP-S では平均計算時間が46秒、最大計算時間が254秒であり、計算時間が大変短い。LP-P では平均計算時間が9584秒であり、特に400品種のインスタンスでは最大75717秒と 2 時間を超え、計算時間が極端に大きい。これは生成される列の数が他の容量レベルに比べて非常に多く、生成とともに変数と制約式が膨大になり、それらの線形計画問題を解くために大きな計算時間を必要とするためである。LF の平均計算時間は1494秒であり、特に400品種のインスタンスの計算時間が大きく、最大で4809秒で 1 時間を超える。計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例しており、繰り返し回数 1000回で1/100、繰り返し回数 1 万回で1/10程度である。LC の平均計算時間は1209秒であり、特に400品種のインスタンスの計算時間が大きく、最大で3754秒と 1 時間程度

である。計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例しており、繰り返し回数1000回で1/100、繰り返し回数1万回で1/10程度である。

表7、表8および表9は、容量レベル4のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表8において、LP-SとLP-Pにおける全体の平均誤差は7.45%であり、容量レベル1の8.17%と比べると、誤差は0.72%減少している。F1000の平均誤差は9.40%、F10000では7.90%、F100000では7.48%と、劣勾配法の繰り返しとともに誤差が減少している。LP-Pの平均誤差との差は、F1000では1.95%、F10000では0.45%、F100000では0.03%である。また、C1000の平均誤差は10.19%、C10000では7.92%、C100000では7.46%である。LP-Pの平均誤差との差は、C1000では2.74%、C10000では0.47%、C100000では0.01%である。

表9において、LP-Sでは平均計算時間が4037秒、最大計算時間が69261秒である。一方、LP-Pでは平均計算時間が3165秒、最大計算時間が25383秒であり、LP-Sより計算時間が小さい。容量レベル1と比べて、LP-Sの計算時間は大きく増加し90倍以上である。一方、LP-Sの計算時間は大きく減少し、1/3程度である。LFの平均計算時間は4337秒であり、400品種の計算時間が大きく、最大で13357秒である。LCの平均計算時間は3169秒であり、400品種の計算時間が大きく、最大で9589秒である。

表10、表11および表12は、容量レベル8のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表11において、LP-SとLP-Pの全体の平均誤差は5.46%であり、容量レベル1の7.45%と比べると、誤差は1.99%減少している。F1000の平均誤差は7.15%、F10000では5.81%、F100000では5.48%である。LP-Pの平均誤差との差は、F1000では1.69%、F10000では0.35%、F100000では0.02%である。また、C1000の平均誤差は7.47%、C10000では5.82%、C100000では5.47%である。LP-Pの平均誤差との差は、C1000では2.01%、C10000では0.36%、C100000では0.01%である。

表12において、LP-Sでは平均計算時間が10516秒、最大計算時間が98191秒である。一方、LP-Pでは平均計算時間が2429秒、最大計算時間が21092秒であり、LP-Sよりも1/5程度の計算時間である。LFの平均計算時間は7506秒であり、400品種の計算時間が長く、最大で24471秒である。LCの平均計算時間は5691秒であり、400品種の計算時間が長く、最大で180222秒である。

表13、表14および表15は、容量レベル16のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表14において、LP-Pの全体の平均誤差は3.02%であり、容量レベル8の5.46%と比べると、誤差は2.44%減少している。なお、LP-Sの全体の平均誤差は3.11%であり、LP-Pよりも0.09%悪化している。これは、400品種の3つインスタンスで30時間の制限により緩和問題の最適値を算出することができていないためである。なお、3つの内の1つのインスタンスではほぼ最適値を算出しているが、30/520/400/F/Tと30/700/400/F/LのインスタンスではLP-P比べてそれぞれ1.92%、0.91%劣っている。

一方、F1000の平均誤差は4.13%、F10000では3.21%、F100000では3.03%である。LP-P

の平均誤差との差は、F1000では1.11%、F10000では0.19%、F100000では0.01%である。また、C1000の平均誤差は4.33%、C10000では3.22%、C100000では3.02%である。LP-Pの平均誤差との差は、C1000では1.31%、C10000では0.20%、C100000では0.00%である。

表15において、LP-Sでは平均計算時間が20162秒、最大計算時間が30時間制限の108000秒である。LP-Pの平均計算時間が2184秒、最大計算時間が35853秒であり、LP-Sよりも平均で1/10程度である。LFの平均計算時間は13190秒であり、400品種の計算時間が大きく、最大で42624秒と10時間を超えている。LCの平均計算時間は10906秒であり、400品種の計算時間が大きく、最大で33651秒と約9時間である。

3. おわりに

強い定式化の線形緩和LP-S、パスフローによる定式化の線形緩和LP-P、フロー保存式のラグランジュ緩和、接続式のラグランジュ緩和とともに、十分な計算時間を使えばほぼ同値の下界値を求めることができた。

計算時間と誤差から見ると、容量レベル1のインスタンスではLP-Sが優れ、容量レベル2のインスタンスではLP-Pと接続式のラグランジュ緩和が優れ、容量レベル8と16ではLP-Pが優れている。LP-Sでは双対実行可能解が得られていれば、途中で計算を打ち切っても下界値を得ることができる。LP-Pでは列生成を用いて解いているために、最適値が得られる前に計算を打ち切ると下界値を得ることはできない。

一方、2つのラグランジュ緩和では、任意の繰り返し回数で打ち切っても、下界値を得ることができる。ラグランジュ緩和問題による下界値は劣勾配法の繰り返し回数に依存し、計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例する。また、変更パラメータにも依存する。このため、誤差と計算時間のバランスをとることやパラメータチューニングが重要となる。

どの緩和問題を用いても容量レベルの小さな問題では誤差、すなわち双対ギャップが大きくなるのが分かり、問題の困難さが認識された。これを解決するためにはさらなる強い定式化の開発が必要である。また、従来の劣勾配法では多くの繰り返しと計算時間は必要となるので、劣勾配法によらない最適化法が必要である。しかし、これらの開発は容易なものではない。

また、一般的なラグランジュ緩和法では下界値を求めると同時に緩和解を用いて上界値を求めるラグランジュヒューリスティクスが用いられる。今回の研究では、ラグランジュヒューリスティクスを提案はしていない。これは、近似解法であるMIP近傍探索法と比べて、ラグランジュ緩和法から優れた解を導出することが困難であったためである。

本研究では、整数アセットを考慮したネットワーク設計問題を対象とし、2種類のラ

グランジュ緩和問題とそれらの解法を示した。ベンチマーク問題を用いて、線形緩和問題と併せてラグランジュ緩和問題について数値実験を行った。理論を裏付けるように、強い定式化の線形緩和問題とラグランジュ緩和問題による下界値はほぼ一致した。また、緩和問題によって計算時間の特性が大きく異なることが明らかになった。なお、双対ギャップの縮小やラグランジュ緩和からの近似解の導出など多くの課題が存在している。

本研究は科学研究費基盤研究 C (課題番号17K01268) による成果の一部である。

参考文献

- Crainic, T.G., A. Frangioni, B. Gendron. 2001. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. *Discrete Applied Mathematics* **112** (1-3) 73-99.
- Croxtton, K.L., B. Gendron, T.L. Magnanti. 2003. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science* **49** 1268-1273.
- Croxtton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2007. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research* **55** 146-157.
- Frangionia, A., B. Gendron. 2009. 0-1 reformulations of the multicommodity capacitated network design problem. *Discrete Applied Mathematics* **157** (6) 1229-1241.
- Gendron, B., L. Gouveia. 2017. Reformulations by discretization for piecewise linear integer multicommodity network flow problems. *Transportation Science* **51** (2) 629-649.
- Held, M., P. Wolfe, H. P. Crowder. 1974. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming* **6** (1) 62-88.
- 片山直登. 2020a. 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題の近似解法. 流通経済大学流通情報学部紀要 **25** (1) 31-60.
- 片山直登. 2020b. 整数アセット・アセットバランス・非分割・入木・ホップ数を考慮したネットワーク設計モデル. 流通経済大学流通情報学部紀要 **24** (2) 1-32.

表 1 : Avegare Gaps for Categories (%)

| COM | LP-W | | | | | AVE | LP-P | | | | | AVE | | | |
|-----|--------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 | 1 | | 4 | 8 | 16 | | | | | | |
| 40 | 109.34 | 32.11 | 15.43 | 5.96 | 40.71 | 1.39 | 0.29 | 0.48 | 0.40 | 0.64 | 1.39 | 0.29 | 0.48 | 0.40 | 0.64 |
| 100 | 364.93 | 125.53 | 70.02 | 35.51 | 149.00 | 8.74 | 6.39 | 4.46 | 2.25 | 5.46 | 8.74 | 6.39 | 4.46 | 2.25 | 5.46 |
| 200 | 461.45 | 143.77 | 77.68 | 40.48 | 180.85 | 9.98 | 10.41 | 7.20 | 3.79 | 7.85 | 9.98 | 10.41 | 7.20 | 3.79 | 7.85 |
| 400 | 439.84 | 155.28 | 89.20 | 49.95 | 183.57 | 11.73 | 11.79 | 9.08 | 5.65 | 9.56 | 11.73 | 11.79 | 9.08 | 5.30 | 9.48 |
| AVE | 351.46 | 116.82 | 64.62 | 33.85 | 141.69 | 8.17 | 7.45 | 5.46 | 3.11 | 6.05 | 8.17 | 7.45 | 5.46 | 3.02 | 6.02 |

| COM | LP-S | | | | | AVE | LF | | | | | AVE | | | |
|-----|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 | 1 | | 4 | 8 | 16 | | | | | | |
| 40 | 1.39 | 0.29 | 0.48 | 0.40 | 0.64 | 1.39 | 0.30 | 0.48 | 0.40 | 0.64 | 1.39 | 0.29 | 0.48 | 0.40 | 0.64 |
| 100 | 8.74 | 6.39 | 4.46 | 2.25 | 5.46 | 8.84 | 6.47 | 4.50 | 2.26 | 5.52 | 8.83 | 6.42 | 4.47 | 2.26 | 5.49 |
| 200 | 9.98 | 10.41 | 7.20 | 3.79 | 7.85 | 9.99 | 10.43 | 7.22 | 3.81 | 7.86 | 10.00 | 10.43 | 7.22 | 3.81 | 7.86 |
| 400 | 11.73 | 11.79 | 9.08 | 5.65 | 9.56 | 11.77 | 11.83 | 9.11 | 5.31 | 9.50 | 11.77 | 11.81 | 9.09 | 5.31 | 9.49 |
| AVE | 8.17 | 7.45 | 5.46 | 3.11 | 6.05 | 8.21 | 7.48 | 5.48 | 3.03 | 6.05 | 8.21 | 7.46 | 5.47 | 3.02 | 6.04 |

表 2 : Average Computation Times for Categories (Seconds)

| COM | LP-W | | | | | AVE | LP-P | | | | | AVE | | | |
|-----|------|----|----|----|----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 | 1 | | 4 | 8 | 16 | | | | | | |
| 40 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 100 | 1 | 2 | 3 | 6 | 3 | 22 | 97 | 267 | 525 | 228 | 534 | 185 | 112 | 76 | 227 |
| 200 | 1 | 1 | 3 | 7 | 3 | 13 | 91 | 1210 | 6144 | 1864 | 1475 | 1722 | 1475 | 1108 | 1445 |
| 400 | 2 | 10 | 31 | 56 | 25 | 145 | 15455 | 39270 | 71459 | 31582 | 35128 | 10357 | 7824 | 7280 | 15147 |
| AVE | 1 | 3 | 10 | 18 | 8 | 46 | 4037 | 10516 | 20162 | 8690 | 9584 | 3165 | 2429 | 2184 | 4341 |

| COM | LP-S | | | | | AVE | LF | | | | | AVE | | | |
|-----|------|-------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|------|------|-------|-------|-------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 | 1 | | 4 | 8 | 16 | | | | | | |
| 40 | 113 | 331 | 587 | 1038 | 517 | 94 | 259 | 473 | 932 | 439 | 94 | 259 | 473 | 932 | 439 |
| 100 | 770 | 2317 | 4025 | 6998 | 3528 | 670 | 1794 | 3246 | 6257 | 2992 | 670 | 1794 | 3246 | 6257 | 2992 |
| 200 | 758 | 2303 | 3877 | 6732 | 3418 | 674 | 1819 | 3195 | 6063 | 2938 | 674 | 1819 | 3195 | 6063 | 2938 |
| 400 | 4164 | 11896 | 20671 | 36471 | 18300 | 3257 | 8440 | 15197 | 29126 | 14005 | 3257 | 8440 | 15197 | 29126 | 14005 |
| AVE | 1494 | 4337 | 7506 | 13190 | 6632 | 1209 | 3169 | 5691 | 10906 | 5244 | 1209 | 3169 | 5691 | 10906 | 5244 |

表 3 : Upper Bounds by Gurobi or MIP Heuristic

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | Capacity Level | | | |
|--------------------------------------|----------------|--------|--------|--------|
| | 1 | 4 | 8 | 16 |
| 20/230/040/V/L | 621560 | 445989 | 408623 | 390206 |
| 20/230/040/V/T | 585739 | 409195 | 373571 | 356018 |
| 20/230/040/F/T | 1325275 | 785592 | 663220 | 599966 |
| 20/230/200/V/L | 330924 | 156600 | 117240 | 93851 |
| 20/230/200/F/L | 600554 | 248363 | 176179 | 136596 |
| 20/230/200/V/T | 357125 | 171706 | 129432 | 103278 |
| 20/230/200/F/T | 614208 | 252999 | 182268 | 146093 |
| 20/300/040/V/L | 685710 | 471430 | 428551 | 403006 |
| 20/300/040/F/L | 1321018 | 735101 | 609755 | 533218 |
| 20/300/040/V/T | 727598 | 511671 | 464779 | 447251 |
| 20/300/040/F/T | 1465541 | 827145 | 684366 | 585616 |
| 20/300/200/V/L | 307162 | 139929 | 105545 | 83197 |
| 20/300/200/F/L | 567560 | 229654 | 164110 | 128933 |
| 20/300/200/V/T | 306206 | 137114 | 100499 | 80820 |
| 20/300/200/F/T | 533271 | 219750 | 154756 | 119955 |
| 30/520/100/V/L | 167238 | 87699 | 67959 | 56035 |
| 30/520/100/F/L | 398913 | 173090 | 125336 | 98181 |
| 30/520/100/V/T | 162572 | 86975 | 67341 | 56199 |
| 30/520/100/F/T | 472076 | 207520 | 151651 | 114842 |
| 30/520/400/V/L | 455020 | 216733 | 162520 | 130983 |
| 30/520/400/F/L | 671519 | 323279 | 236320 | 181456 |
| 30/520/400/V/T | 456889 | 230769 | 175060 | 140104 |
| 30/520/400/F/T | 741297 | 326717 | 241033 | 191674 |
| 30/700/100/V/L | 156692 | 80380 | 61897 | 50238 |
| 30/700/100/F/L | 222059 | 107315 | 80662 | 63141 |
| 30/700/100/V/T | 149221 | 76875 | 59870 | 49694 |
| 30/700/100/F/T | 223723 | 110434 | 82528 | 64000 |
| 30/700/400/V/L | 418346 | 209019 | 156406 | 122814 |
| 30/700/400/F/L | 644891 | 286267 | 206726 | 165582 |
| 30/700/400/V/T | 391879 | 196374 | 149383 | 119826 |
| 30/700/400/F/T | 632574 | 285465 | 207198 | 162801 |

表 4 : Lower Bounds of Capacity Level 1

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 377765 | 621560 | 621560 | 619631 | 621559 | 621560 | 621267 | 621560 | 621560 |
| 20/230/040/V/T | 345650 | 585295 | 585295 | 582576 | 585261 | 585295 | 583549 | 585209 | 585295 |
| 20/230/040/F/T | 554324 | 1308740 | 1308740 | 1290502 | 1305969 | 1308578 | 1294264 | 1306222 | 1308651 |
| 20/230/200/V/L | 68797 | 300712 | 300712 | 289198 | 299373 | 300678 | 286246 | 299087 | 300667 |
| 20/230/200/F/L | 98341 | 544344 | 544344 | 529169 | 541960 | 544310 | 524003 | 541587 | 544290 |
| 20/230/200/V/T | 73969 | 328910 | 328910 | 318404 | 326928 | 328829 | 316391 | 327337 | 328854 |
| 20/230/200/F/T | 100632 | 579928 | 579928 | 573929 | 578469 | 579894 | 555812 | 577806 | 579848 |
| 20/300/040/V/L | 385946 | 685710 | 685710 | 682634 | 685660 | 685705 | 683382 | 685536 | 685671 |
| 20/300/040/F/L | 489315 | 1270359 | 1270359 | 1250567 | 1264236 | 1270311 | 1249938 | 1263791 | 1270304 |
| 20/300/040/V/T | 433329 | 727598 | 727598 | 724418 | 727543 | 727597 | 726073 | 727583 | 727598 |
| 20/300/040/F/T | 529593 | 1403890 | 1403890 | 1375769 | 1396682 | 1403826 | 1382822 | 1395782 | 1403820 |
| 20/300/200/V/L | 58857 | 274916 | 274916 | 270567 | 273744 | 274897 | 260880 | 273289 | 274875 |
| 20/300/200/F/L | 87874 | 507849 | 507849 | 499181 | 505549 | 507794 | 481661 | 504523 | 507750 |
| 20/300/200/V/T | 60435 | 269186 | 269186 | 260616 | 267266 | 269129 | 258907 | 267432 | 269158 |
| 20/300/200/F/T | 84332 | 494915 | 494915 | 479283 | 493253 | 494892 | 460221 | 490421 | 494664 |
| 30/520/100/V/L | 43657 | 154959 | 154959 | 151097 | 153714 | 154750 | 148003 | 153940 | 154891 |
| 30/520/100/F/L | 66982 | 369835 | 369835 | 364371 | 368534 | 369783 | 337400 | 366480 | 369512 |
| 30/520/100/V/T | 45419 | 152605 | 152605 | 148155 | 150911 | 152224 | 145581 | 151754 | 152553 |
| 30/520/100/F/T | 76196 | 426851 | 426851 | 418116 | 423845 | 426655 | 392092 | 421552 | 426287 |
| 30/520/400/V/L | 95115 | 403210 | 403210 | 394022 | 400674 | 403128 | 386491 | 400519 | 403141 |
| 30/520/400/F/L | 121333 | 608777 | 608777 | 597199 | 605631 | 608674 | 572449 | 604573 | 608604 |
| 30/520/400/V/T | 97664 | 419626 | 419626 | 409072 | 417156 | 419440 | 392437 | 417036 | 419507 |
| 30/520/400/F/T | 124355 | 658354 | 658354 | 637116 | 653368 | 658146 | 623167 | 654079 | 658256 |
| 30/700/100/V/L | 38952 | 144707 | 144707 | 140235 | 143072 | 144484 | 136881 | 143705 | 144633 |
| 30/700/100/F/L | 45687 | 204316 | 204316 | 200397 | 203339 | 204263 | 188208 | 202623 | 204177 |
| 30/700/100/V/T | 40023 | 137050 | 137050 | 134215 | 136404 | 136993 | 128989 | 136222 | 137001 |
| 30/700/100/F/T | 44552 | 201202 | 201202 | 196809 | 200083 | 201127 | 186705 | 198994 | 200913 |
| 30/700/400/V/L | 78149 | 366461 | 366461 | 357555 | 363580 | 366266 | 349791 | 363667 | 366376 |
| 30/700/400/F/L | 105645 | 591593 | 591593 | 577048 | 588474 | 591440 | 543584 | 586045 | 591129 |
| 30/700/400/V/T | 80143 | 346424 | 346424 | 339520 | 344526 | 346383 | 326498 | 343756 | 346323 |
| 30/700/400/F/T | 107539 | 560028 | 560028 | 545789 | 556433 | 559946 | 522850 | 555761 | 559896 |

表 5 : Gaps Bounds of Capacity Level 1 (%)

| Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|-------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 64.54 | 0.00 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.00 | 0.05 | 0.00 | 0.00 |
| 20/230/040/V/T | 69.46 | 0.08 | 0.08 | 0.54 | 0.08 | 0.08 | 0.38 | 0.09 | 0.08 |
| 20/230/040/F/T | 139.08 | 1.26 | 1.26 | 2.69 | 1.48 | 1.28 | 2.40 | 1.46 | 1.27 |
| 20/230/200/V/L | 381.02 | 10.05 | 10.05 | 14.43 | 10.54 | 10.06 | 15.61 | 10.64 | 10.06 |
| 20/230/200/F/L | 510.68 | 10.33 | 10.33 | 13.49 | 10.81 | 10.33 | 14.61 | 10.89 | 10.34 |
| 20/230/200/V/T | 382.81 | 8.58 | 8.58 | 12.16 | 9.24 | 8.61 | 12.87 | 9.10 | 8.60 |
| 20/230/200/F/T | 510.35 | 5.91 | 5.91 | 7.02 | 6.18 | 5.92 | 10.51 | 6.30 | 5.93 |
| 20/300/040/V/L | 77.67 | 0.00 | 0.00 | 0.45 | 0.01 | 0.00 | 0.34 | 0.03 | 0.01 |
| 20/300/040/F/L | 169.97 | 3.99 | 3.99 | 5.63 | 4.49 | 3.99 | 5.69 | 4.53 | 3.99 |
| 20/300/040/V/T | 67.91 | 0.00 | 0.00 | 0.44 | 0.01 | 0.00 | 0.21 | 0.00 | 0.00 |
| 20/300/040/F/T | 176.73 | 4.39 | 4.39 | 6.53 | 4.93 | 4.40 | 5.98 | 5.00 | 4.40 |
| 20/300/200/V/L | 421.88 | 11.73 | 11.73 | 13.53 | 12.21 | 11.74 | 17.74 | 12.39 | 11.75 |
| 20/300/200/F/L | 545.88 | 11.76 | 11.76 | 13.70 | 12.27 | 11.77 | 17.83 | 12.49 | 11.78 |
| 20/300/200/V/T | 406.67 | 13.75 | 13.75 | 17.49 | 14.57 | 13.78 | 18.27 | 14.50 | 13.76 |
| 20/300/200/F/T | 532.35 | 7.75 | 7.75 | 11.26 | 8.11 | 7.76 | 15.87 | 8.74 | 7.80 |
| 30/520/100/V/L | 283.07 | 7.92 | 7.92 | 10.68 | 8.80 | 8.07 | 13.00 | 8.64 | 7.97 |
| 30/520/100/F/L | 495.55 | 7.86 | 7.86 | 9.48 | 8.24 | 7.88 | 18.23 | 8.85 | 7.96 |
| 30/520/100/V/T | 257.94 | 6.53 | 6.53 | 9.73 | 7.73 | 6.80 | 11.67 | 7.13 | 6.57 |
| 30/520/100/F/T | 519.55 | 10.60 | 10.60 | 12.91 | 11.38 | 10.65 | 20.40 | 11.99 | 10.74 |
| 30/520/400/V/L | 378.39 | 12.85 | 12.85 | 15.48 | 13.56 | 12.87 | 17.73 | 13.61 | 12.87 |
| 30/520/400/F/L | 453.45 | 10.31 | 10.31 | 12.44 | 10.88 | 10.32 | 17.31 | 11.07 | 10.34 |
| 30/520/400/V/T | 367.81 | 8.88 | 8.88 | 11.69 | 9.52 | 8.93 | 16.42 | 9.56 | 8.91 |
| 30/520/400/F/T | 496.12 | 12.60 | 12.60 | 16.35 | 13.46 | 12.63 | 18.96 | 13.33 | 12.62 |
| 30/700/100/V/L | 302.27 | 8.28 | 8.28 | 11.74 | 9.52 | 8.45 | 14.47 | 9.04 | 8.34 |
| 30/700/100/F/L | 386.05 | 8.68 | 8.68 | 10.81 | 9.21 | 8.71 | 17.99 | 9.59 | 8.76 |
| 30/700/100/V/T | 272.84 | 8.88 | 8.88 | 11.18 | 9.40 | 8.93 | 15.69 | 9.54 | 8.92 |
| 30/700/100/F/T | 402.16 | 11.19 | 11.19 | 13.68 | 11.82 | 11.23 | 19.83 | 12.43 | 11.35 |
| 30/700/400/V/L | 435.32 | 14.16 | 14.16 | 17.00 | 15.06 | 14.22 | 19.60 | 15.04 | 14.18 |
| 30/700/400/F/L | 510.43 | 9.01 | 9.01 | 11.76 | 9.59 | 9.04 | 18.64 | 10.04 | 9.09 |
| 30/700/400/V/T | 388.97 | 13.12 | 13.12 | 15.42 | 13.74 | 13.13 | 20.02 | 14.00 | 13.15 |
| 30/700/400/F/T | 488.23 | 12.95 | 12.95 | 15.90 | 13.68 | 12.97 | 20.99 | 13.82 | 12.98 |
| Average | 351.46 | 8.17 | 8.17 | 10.51 | 8.73 | 8.21 | 13.53 | 8.83 | 8.21 |

表 6 : Computation Times of Capacity Level 1 (seconds)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|------|------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 92 | 1 | 8 | 77 |
| 20/230/040/V/T | 0 | 0 | 0 | 1 | 10 | 100 | 1 | 8 | 82 |
| 20/230/040/F/T | 0 | 1 | 1 | 1 | 10 | 101 | 1 | 9 | 86 |
| 20/230/200/V/L | 0 | 13 | 693 | 7 | 66 | 658 | 6 | 59 | 575 |
| 20/230/200/F/L | 1 | 10 | 1244 | 7 | 69 | 682 | 6 | 60 | 603 |
| 20/230/200/V/T | 0 | 13 | 696 | 7 | 66 | 655 | 6 | 57 | 572 |
| 20/230/200/F/T | 0 | 11 | 1404 | 7 | 65 | 654 | 6 | 60 | 597 |
| 20/300/040/V/L | 0 | 0 | 0 | 1 | 12 | 119 | 1 | 10 | 97 |
| 20/300/040/F/L | 0 | 1 | 3 | 1 | 13 | 129 | 1 | 11 | 106 |
| 20/300/040/V/T | 0 | 0 | 0 | 1 | 13 | 126 | 1 | 10 | 102 |
| 20/300/040/F/T | 0 | 1 | 3 | 1 | 13 | 126 | 1 | 10 | 105 |
| 20/300/200/V/L | 1 | 14 | 1378 | 9 | 88 | 876 | 8 | 77 | 772 |
| 20/300/200/F/L | 1 | 14 | 2827 | 9 | 85 | 844 | 8 | 76 | 764 |
| 20/300/200/V/T | 1 | 12 | 1085 | 9 | 85 | 852 | 7 | 74 | 742 |
| 20/300/200/F/T | 1 | 15 | 2474 | 9 | 84 | 845 | 8 | 77 | 766 |
| 30/520/100/V/L | 1 | 21 | 129 | 7 | 65 | 647 | 6 | 55 | 548 |
| 30/520/100/F/L | 1 | 18 | 769 | 7 | 67 | 659 | 6 | 60 | 593 |
| 30/520/100/V/T | 1 | 19 | 116 | 7 | 66 | 662 | 6 | 56 | 553 |
| 30/520/100/F/T | 1 | 20 | 1294 | 7 | 65 | 660 | 6 | 60 | 597 |
| 30/520/400/V/L | 2 | 94 | 8955 | 36 | 362 | 3622 | 29 | 284 | 2826 |
| 30/520/400/F/L | 2 | 75 | 37405 | 36 | 360 | 3631 | 29 | 288 | 2885 |
| 30/520/400/V/T | 2 | 122 | 9361 | 36 | 355 | 3561 | 29 | 280 | 2774 |
| 30/520/400/F/T | 2 | 132 | 34330 | 35 | 354 | 3559 | 29 | 284 | 2863 |
| 30/700/100/V/L | 1 | 22 | 216 | 9 | 87 | 872 | 8 | 75 | 746 |
| 30/700/100/F/L | 1 | 26 | 785 | 9 | 87 | 870 | 8 | 78 | 770 |
| 30/700/100/V/T | 1 | 25 | 227 | 9 | 89 | 895 | 8 | 76 | 762 |
| 30/700/100/F/T | 1 | 22 | 737 | 9 | 91 | 891 | 8 | 80 | 789 |
| 30/700/400/V/L | 3 | 132 | 37360 | 46 | 463 | 4677 | 37 | 361 | 3609 |
| 30/700/400/F/L | 3 | 157 | 75717 | 47 | 473 | 4749 | 38 | 378 | 3754 |
| 30/700/400/V/T | 3 | 191 | 24393 | 47 | 474 | 4704 | 37 | 364 | 3625 |
| 30/700/400/F/T | 3 | 254 | 53507 | 48 | 473 | 4809 | 38 | 374 | 3724 |
| Average | 1 | 46 | 9584 | 15 | 149 | 1494 | 12 | 121 | 1209 |

表 7 : Lower Bounds of Capacity Level 4

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 377766 | 445880 | 445880 | 445807 | 445877 | 445880 | 445844 | 445880 | 445880 |
| 20/230/040/V/T | 345647 | 409195 | 409195 | 409177 | 409195 | 409195 | 409195 | 409195 | 409195 |
| 20/230/040/F/T | 554333 | 785383 | 785383 | 781331 | 784958 | 785207 | 783351 | 785346 | 785381 |
| 20/230/200/V/L | 68800 | 142338 | 142338 | 139211 | 141611 | 142312 | 138734 | 141617 | 142324 |
| 20/230/200/F/L | 98347 | 219755 | 219755 | 215060 | 218679 | 219736 | 214376 | 218403 | 219726 |
| 20/230/200/V/T | 73970 | 158857 | 158857 | 154973 | 158136 | 158802 | 155345 | 158126 | 158817 |
| 20/230/200/F/T | 100641 | 229281 | 229281 | 225884 | 228337 | 229253 | 223136 | 227976 | 229246 |
| 20/300/040/V/L | 385946 | 471430 | 471430 | 471313 | 471430 | 471430 | 471430 | 471430 | 471430 |
| 20/300/040/F/L | 489321 | 730609 | 730609 | 723924 | 730005 | 730588 | 726006 | 729979 | 730588 |
| 20/300/040/V/T | 433328 | 511351 | 511351 | 510828 | 511340 | 511351 | 511329 | 511329 | 511351 |
| 20/300/040/F/T | 529598 | 816395 | 816395 | 809692 | 815114 | 816386 | 813186 | 815037 | 816383 |
| 20/300/200/V/L | 58859 | 127195 | 127195 | 124549 | 126572 | 127167 | 123345 | 126476 | 127172 |
| 20/300/200/F/L | 87877 | 204466 | 204466 | 200623 | 203464 | 204446 | 196368 | 203011 | 204439 |
| 20/300/200/V/T | 60437 | 127394 | 127394 | 122942 | 126670 | 127335 | 123930 | 126818 | 127367 |
| 20/300/200/F/T | 84337 | 196438 | 196438 | 193527 | 195505 | 196419 | 189295 | 195266 | 196420 |
| 30/520/100/V/L | 43657 | 83355 | 83355 | 81554 | 82938 | 83288 | 81621 | 83092 | 83349 |
| 30/520/100/F/L | 66990 | 159134 | 159134 | 156639 | 158506 | 159111 | 151889 | 158226 | 159087 |
| 30/520/100/V/T | 45419 | 83046 | 83046 | 81371 | 82644 | 82964 | 81433 | 82830 | 83039 |
| 30/520/100/F/T | 76204 | 191628 | 191628 | 187541 | 190324 | 191388 | 181006 | 190286 | 191524 |
| 30/520/400/V/L | 95115 | 198143 | 198143 | 193872 | 197042 | 198077 | 193148 | 197198 | 198113 |
| 30/520/400/F/L | 121335 | 283439 | 283439 | 277383 | 281657 | 283387 | 274407 | 281451 | 283394 |
| 30/520/400/V/T | 97665 | 207483 | 207483 | 202468 | 206232 | 207402 | 203108 | 206361 | 207462 |
| 30/520/400/F/T | 124357 | 294905 | 294905 | 288259 | 293000 | 294797 | 284414 | 293206 | 294851 |
| 30/700/100/V/L | 38953 | 76838 | 76838 | 75335 | 76439 | 76726 | 75154 | 76587 | 76828 |
| 30/700/100/F/L | 45689 | 101127 | 101127 | 98883 | 100693 | 101092 | 97338 | 100598 | 101095 |
| 30/700/100/V/T | 40023 | 73904 | 73904 | 72411 | 73623 | 73870 | 71989 | 73665 | 73886 |
| 30/700/100/F/T | 44555 | 100966 | 100966 | 98976 | 100519 | 100949 | 97601 | 100429 | 100947 |
| 30/700/400/V/L | 78148 | 181676 | 181676 | 177069 | 180348 | 181630 | 177317 | 180363 | 181653 |
| 30/700/400/F/L | 105646 | 256198 | 256198 | 250766 | 254852 | 256148 | 245873 | 254410 | 256127 |
| 30/700/400/V/T | 80143 | 177959 | 177959 | 173055 | 176969 | 177893 | 172897 | 176939 | 177927 |
| 30/700/400/F/T | 107540 | 255404 | 255404 | 249491 | 253926 | 255330 | 245440 | 253785 | 255365 |

表 8 : Gaps Bounds of Capacity Level 4 (%)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 18.06 | 0.02 | 0.02 | 0.04 | 0.03 | 0.02 | 0.03 | 0.02 | 0.02 |
| 20/230/040/V/T | 18.39 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 20/230/040/F/T | 41.72 | 0.03 | 0.03 | 0.55 | 0.08 | 0.05 | 0.29 | 0.03 | 0.03 |
| 20/230/200/V/L | 127.62 | 10.02 | 10.02 | 12.49 | 10.58 | 10.04 | 12.88 | 10.58 | 10.03 |
| 20/230/200/F/L | 152.54 | 13.02 | 13.02 | 15.49 | 13.57 | 13.03 | 15.85 | 13.72 | 13.03 |
| 20/230/200/V/T | 132.13 | 8.09 | 8.09 | 10.80 | 8.58 | 8.13 | 10.53 | 8.59 | 8.12 |
| 20/230/200/F/T | 151.39 | 10.34 | 10.34 | 12.00 | 10.80 | 10.36 | 13.38 | 10.98 | 10.36 |
| 20/300/040/V/L | 22.15 | 0.00 | 0.00 | 0.02 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 20/300/040/F/L | 50.23 | 0.61 | 0.61 | 1.54 | 0.70 | 0.62 | 1.25 | 0.70 | 0.62 |
| 20/300/040/V/T | 18.08 | 0.06 | 0.06 | 0.16 | 0.06 | 0.06 | 0.07 | 0.07 | 0.06 |
| 20/300/040/F/T | 56.18 | 1.32 | 1.32 | 2.16 | 1.48 | 1.32 | 1.72 | 1.49 | 1.32 |
| 20/300/200/V/L | 137.73 | 10.01 | 10.01 | 12.35 | 10.55 | 10.04 | 13.45 | 10.64 | 10.03 |
| 20/300/200/F/L | 161.33 | 12.32 | 12.32 | 14.47 | 12.87 | 12.33 | 16.95 | 13.12 | 12.33 |
| 20/300/200/V/T | 126.87 | 7.63 | 7.63 | 11.53 | 8.25 | 7.68 | 10.64 | 8.12 | 7.65 |
| 20/300/200/F/T | 160.56 | 11.87 | 11.87 | 13.55 | 12.40 | 11.88 | 16.09 | 12.54 | 11.88 |
| 30/520/100/V/L | 100.88 | 5.21 | 5.21 | 7.54 | 5.74 | 5.30 | 7.45 | 5.54 | 5.22 |
| 30/520/100/F/L | 158.38 | 8.77 | 8.77 | 10.50 | 9.20 | 8.79 | 13.96 | 9.39 | 8.80 |
| 30/520/100/V/T | 91.49 | 4.73 | 4.73 | 6.89 | 5.24 | 4.83 | 6.81 | 5.00 | 4.74 |
| 30/520/100/F/T | 172.32 | 8.29 | 8.29 | 10.65 | 9.04 | 8.43 | 14.65 | 9.06 | 8.35 |
| 30/520/400/V/L | 127.86 | 9.38 | 9.38 | 11.79 | 9.99 | 9.42 | 12.21 | 9.91 | 9.40 |
| 30/520/400/F/L | 166.44 | 14.06 | 14.06 | 16.55 | 14.78 | 14.08 | 17.81 | 14.86 | 14.07 |
| 30/520/400/V/T | 136.29 | 11.22 | 11.22 | 13.98 | 11.90 | 11.27 | 13.62 | 11.83 | 11.23 |
| 30/520/400/F/T | 162.73 | 10.79 | 10.79 | 13.34 | 11.51 | 10.83 | 14.87 | 11.43 | 10.81 |
| 30/700/100/V/L | 106.35 | 4.61 | 4.61 | 6.70 | 5.16 | 4.76 | 6.95 | 4.95 | 4.62 |
| 30/700/100/F/L | 134.88 | 6.12 | 6.12 | 8.53 | 6.58 | 6.16 | 10.25 | 6.68 | 6.15 |
| 30/700/100/V/T | 92.08 | 4.02 | 4.02 | 6.17 | 4.42 | 4.07 | 6.79 | 4.36 | 4.04 |
| 30/700/100/F/T | 147.86 | 9.38 | 9.38 | 11.58 | 9.86 | 9.40 | 13.15 | 9.96 | 9.40 |
| 30/700/400/V/L | 167.47 | 15.05 | 15.05 | 18.04 | 15.90 | 15.08 | 17.88 | 15.89 | 15.07 |
| 30/700/400/F/L | 170.97 | 11.74 | 11.74 | 14.16 | 12.33 | 11.76 | 16.43 | 12.52 | 11.77 |
| 30/700/400/V/T | 145.03 | 10.35 | 10.35 | 13.48 | 10.96 | 10.39 | 13.58 | 10.98 | 10.37 |
| 30/700/400/F/T | 165.45 | 11.77 | 11.77 | 14.42 | 12.42 | 11.80 | 16.31 | 12.48 | 11.79 |
| Average | 116.82 | 7.45 | 7.45 | 9.40 | 7.90 | 7.48 | 10.19 | 7.92 | 7.46 |

表 9 : Computation Times of Capacity Level 4 (seconds)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 0 | 0 | 0 | 3 | 27 | 279 | 2 | 21 | 219 |
| 20/230/040/V/T | 0 | 0 | 0 | 3 | 25 | 245 | 2 | 23 | 237 |
| 20/230/040/F/T | 0 | 1 | 0 | 3 | 29 | 300 | 2 | 23 | 224 |
| 20/230/200/V/L | 1 | 93 | 658 | 19 | 191 | 2002 | 16 | 156 | 1543 |
| 20/230/200/F/L | 2 | 70 | 1365 | 20 | 197 | 2054 | 16 | 163 | 1628 |
| 20/230/200/V/T | 1 | 57 | 390 | 20 | 194 | 2009 | 16 | 158 | 1546 |
| 20/230/200/F/T | 1 | 98 | 2374 | 19 | 188 | 1978 | 16 | 157 | 1613 |
| 20/300/040/V/L | 0 | 0 | 0 | 3 | 35 | 357 | 3 | 27 | 261 |
| 20/300/040/F/L | 0 | 1 | 0 | 4 | 37 | 381 | 3 | 29 | 292 |
| 20/300/040/V/T | 0 | 0 | 0 | 4 | 36 | 372 | 3 | 29 | 289 |
| 20/300/040/F/T | 0 | 1 | 0 | 4 | 37 | 383 | 3 | 29 | 291 |
| 20/300/200/V/L | 1 | 101 | 1453 | 25 | 250 | 2597 | 20 | 204 | 2033 |
| 20/300/200/F/L | 1 | 107 | 4263 | 25 | 249 | 2588 | 20 | 209 | 2100 |
| 20/300/200/V/T | 1 | 73 | 577 | 25 | 249 | 2642 | 20 | 201 | 2011 |
| 20/300/200/F/T | 2 | 129 | 2697 | 25 | 248 | 2555 | 21 | 205 | 2075 |
| 30/520/100/V/L | 1 | 57 | 16 | 19 | 189 | 1986 | 15 | 153 | 1513 |
| 30/520/100/F/L | 1 | 98 | 410 | 19 | 190 | 1978 | 16 | 160 | 1567 |
| 30/520/100/V/T | 2 | 34 | 10 | 19 | 195 | 2033 | 15 | 154 | 1543 |
| 30/520/100/F/T | 1 | 104 | 722 | 19 | 191 | 1981 | 16 | 157 | 1587 |
| 30/520/400/V/L | 8 | 9882 | 2142 | 101 | 1012 | 10587 | 74 | 732 | 7221 |
| 30/520/400/F/L | 8 | 21372 | 14247 | 104 | 1009 | 10623 | 75 | 764 | 7611 |
| 30/520/400/V/T | 8 | 1855 | 2053 | 101 | 1003 | 10388 | 73 | 734 | 7287 |
| 30/520/400/F/T | 8 | 1784 | 9777 | 100 | 997 | 10354 | 75 | 733 | 7431 |
| 30/700/100/V/L | 2 | 55 | 16 | 25 | 255 | 2608 | 20 | 202 | 2007 |
| 30/700/100/F/L | 2 | 145 | 169 | 26 | 254 | 2623 | 21 | 203 | 2041 |
| 30/700/100/V/T | 2 | 146 | 23 | 26 | 254 | 2651 | 21 | 205 | 2007 |
| 30/700/100/F/T | 2 | 139 | 112 | 26 | 254 | 2678 | 21 | 211 | 2087 |
| 30/700/400/V/L | 11 | 6744 | 5761 | 133 | 1309 | 13357 | 97 | 961 | 9589 |
| 30/700/400/F/L | 11 | 6738 | 25383 | 131 | 1302 | 13224 | 96 | 966 | 9521 |
| 30/700/400/V/T | 12 | 6001 | 5303 | 131 | 1300 | 13331 | 96 | 948 | 9282 |
| 30/700/400/F/T | 11 | 69261 | 18190 | 135 | 1332 | 13304 | 99 | 985 | 9577 |
| Average | 3 | 4037 | 3165 | 42 | 421 | 4337 | 32 | 319 | 3169 |

表10 : Lower Bounds of Capacity Level 8

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | F1000 | LF F10000 | F100000 | C1000 | LC C10000 | C100000 |
|--------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------------|---------|--------|--------------|---------|
| 20/230/040/V/L | 377764 | 408473 | 408473 | 408441 | 408466 | 408473 | 408451 | 408470 | 408473 |
| 20/230/040/V/T | 345644 | 373343 | 373343 | 373049 | 373327 | 373343 | 373106 | 373328 | 373343 |
| 20/230/040/F/T | 554344 | 659439 | 659439 | 658677 | 659120 | 659437 | 658814 | 659098 | 659436 |
| 20/230/200/V/L | 68804 | 109742 | 109742 | 107775 | 109395 | 109729 | 107077 | 109313 | 109723 |
| 20/230/200/F/L | 98351 | 160816 | 160816 | 157729 | 160133 | 160795 | 156174 | 159924 | 160782 |
| 20/230/200/V/T | 73972 | 123136 | 123136 | 120469 | 122684 | 123092 | 120598 | 122761 | 123118 |
| 20/230/200/F/T | 100651 | 170171 | 170171 | 167109 | 169622 | 170145 | 165112 | 169376 | 170126 |
| 20/300/040/V/L | 385946 | 427947 | 427947 | 427895 | 427918 | 427947 | 427917 | 427938 | 427947 |
| 20/300/040/F/L | 489325 | 601757 | 601757 | 599966 | 600865 | 601749 | 599620 | 600734 | 601748 |
| 20/300/040/V/T | 433327 | 464571 | 464571 | 464543 | 464569 | 464571 | 464567 | 464569 | 464571 |
| 20/300/040/F/T | 529606 | 676624 | 676624 | 673814 | 675665 | 676617 | 674875 | 675708 | 676617 |
| 20/300/200/V/L | 58862 | 97939 | 97939 | 96111 | 97597 | 97927 | 95729 | 97537 | 97932 |
| 20/300/200/F/L | 87884 | 149833 | 149833 | 147225 | 149203 | 149803 | 145060 | 148943 | 149792 |
| 20/300/200/V/T | 60439 | 97309 | 97309 | 94399 | 96952 | 97261 | 95148 | 96975 | 97278 |
| 20/300/200/F/T | 84343 | 142742 | 142742 | 140386 | 142224 | 142733 | 138328 | 141983 | 142715 |
| 30/520/100/V/L | 43660 | 66195 | 66195 | 64936 | 65978 | 66180 | 65340 | 66076 | 66191 |
| 30/520/100/F/L | 67001 | 116765 | 116765 | 114594 | 116343 | 116741 | 113308 | 116262 | 116738 |
| 30/520/100/V/T | 45421 | 66399 | 66399 | 65202 | 66140 | 66313 | 65536 | 66298 | 66390 |
| 30/520/100/F/T | 76210 | 141029 | 141029 | 138200 | 140292 | 140966 | 135888 | 140243 | 141001 |
| 30/520/400/V/L | 95114 | 153745 | 153745 | 150944 | 153182 | 153697 | 150842 | 153242 | 153724 |
| 30/520/400/F/L | 121334 | 213771 | 213771 | 209709 | 212715 | 213741 | 208374 | 212599 | 213748 |
| 30/520/400/V/T | 97664 | 161244 | 161244 | 157963 | 160542 | 161221 | 158746 | 160549 | 161232 |
| 30/520/400/F/T | 124358 | 219547 | 219547 | 215022 | 218421 | 219477 | 214117 | 218383 | 219516 |
| 30/700/100/V/L | 38955 | 60158 | 60158 | 59337 | 60044 | 60151 | 59570 | 60053 | 60152 |
| 30/700/100/F/L | 45694 | 76579 | 76579 | 75276 | 76332 | 76566 | 74772 | 76319 | 76567 |
| 30/700/100/V/T | 40023 | 58583 | 58583 | 57582 | 58422 | 58566 | 57734 | 58496 | 58580 |
| 30/700/100/F/T | 44561 | 77630 | 77630 | 76307 | 77363 | 77623 | 75932 | 77324 | 77621 |
| 30/700/400/V/L | 78147 | 140359 | 140359 | 137169 | 139528 | 140326 | 137749 | 139568 | 140348 |
| 30/700/400/F/L | 105648 | 188095 | 188095 | 183678 | 187128 | 188056 | 181900 | 186920 | 188051 |
| 30/700/400/V/T | 80141 | 138934 | 138934 | 135141 | 138196 | 138869 | 136091 | 138345 | 138916 |
| 30/700/400/F/T | 107541 | 189855 | 189855 | 186109 | 188849 | 189775 | 184498 | 188798 | 189805 |

表11 : Gaps Bounds of Capacity Level 8 (%)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|--------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 8.17 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 | 0.04 |
| 20/230/040/V/T | 8.08 | 0.06 | 0.06 | 0.14 | 0.07 | 0.06 | 0.12 | 0.07 | 0.06 |
| 20/230/040/F/T | 19.64 | 0.57 | 0.57 | 0.69 | 0.62 | 0.57 | 0.67 | 0.63 | 0.57 |
| 20/230/200/V/L | 70.40 | 6.83 | 6.83 | 8.78 | 7.17 | 6.84 | 9.49 | 7.25 | 6.85 |
| 20/230/200/F/L | 79.13 | 9.55 | 9.55 | 11.70 | 10.02 | 9.57 | 12.81 | 10.16 | 9.58 |
| 20/230/200/V/T | 74.97 | 5.11 | 5.11 | 7.44 | 5.50 | 5.15 | 7.32 | 5.43 | 5.13 |
| 20/230/200/F/T | 81.09 | 7.11 | 7.11 | 9.07 | 7.46 | 7.13 | 10.39 | 7.61 | 7.14 |
| 20/300/040/V/L | 11.04 | 0.14 | 0.14 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.15 | 0.14 | 0.14 |
| 20/300/040/F/L | 24.61 | 1.33 | 1.33 | 1.63 | 1.48 | 1.33 | 1.69 | 1.50 | 1.33 |
| 20/300/040/V/T | 7.26 | 0.04 | 0.04 | 0.05 | 0.05 | 0.04 | 0.05 | 0.05 | 0.04 |
| 20/300/040/F/T | 29.22 | 1.14 | 1.14 | 1.57 | 1.29 | 1.15 | 1.41 | 1.28 | 1.15 |
| 20/300/200/V/L | 79.31 | 7.77 | 7.77 | 9.82 | 8.14 | 7.78 | 10.25 | 8.21 | 7.77 |
| 20/300/200/F/L | 86.73 | 9.53 | 9.53 | 11.47 | 9.99 | 9.55 | 13.13 | 10.18 | 9.56 |
| 20/300/200/V/T | 66.28 | 3.28 | 3.28 | 6.46 | 3.66 | 3.33 | 5.62 | 3.63 | 3.31 |
| 20/300/200/F/T | 83.48 | 8.42 | 8.42 | 10.24 | 8.81 | 8.42 | 11.88 | 9.00 | 8.44 |
| 30/520/100/V/L | 55.65 | 2.66 | 2.66 | 4.66 | 3.00 | 2.69 | 4.01 | 2.85 | 2.67 |
| 30/520/100/F/L | 87.07 | 7.34 | 7.34 | 9.37 | 7.73 | 7.36 | 10.62 | 7.80 | 7.37 |
| 30/520/100/V/T | 48.26 | 1.42 | 1.42 | 3.28 | 1.82 | 1.55 | 2.75 | 1.57 | 1.43 |
| 30/520/100/F/T | 98.99 | 7.53 | 7.53 | 9.73 | 8.10 | 7.58 | 11.60 | 8.13 | 7.55 |
| 30/520/400/V/L | 70.87 | 5.71 | 5.71 | 7.67 | 6.10 | 5.74 | 7.74 | 6.05 | 5.72 |
| 30/520/400/F/L | 94.77 | 10.55 | 10.55 | 12.69 | 11.10 | 10.56 | 13.41 | 11.16 | 10.56 |
| 30/520/400/V/T | 79.25 | 8.57 | 8.57 | 10.82 | 9.04 | 8.58 | 10.28 | 9.04 | 8.58 |
| 30/520/400/F/T | 93.82 | 9.79 | 9.79 | 12.10 | 10.35 | 9.82 | 12.57 | 10.37 | 9.80 |
| 30/700/100/V/L | 58.90 | 2.89 | 2.89 | 4.31 | 3.09 | 2.90 | 3.91 | 3.07 | 2.90 |
| 30/700/100/F/L | 76.53 | 5.33 | 5.33 | 7.16 | 5.67 | 5.35 | 7.88 | 5.69 | 5.35 |
| 30/700/100/V/T | 49.59 | 2.20 | 2.20 | 3.97 | 2.48 | 2.23 | 3.70 | 2.35 | 2.20 |
| 30/700/100/F/T | 85.20 | 6.31 | 6.31 | 8.15 | 6.68 | 6.32 | 8.69 | 6.73 | 6.32 |
| 30/700/400/V/L | 100.14 | 11.43 | 11.43 | 14.02 | 12.10 | 11.46 | 13.54 | 12.06 | 11.44 |
| 30/700/400/F/L | 95.68 | 9.91 | 9.91 | 12.55 | 10.47 | 9.93 | 13.65 | 10.60 | 9.93 |
| 30/700/400/V/T | 86.40 | 7.52 | 7.52 | 10.54 | 8.09 | 7.57 | 9.77 | 7.98 | 7.53 |
| 30/700/400/F/T | 92.67 | 9.14 | 9.14 | 11.33 | 9.72 | 9.18 | 12.30 | 9.75 | 9.16 |
| Average | 64.62 | 5.46 | 5.46 | 7.15 | 5.81 | 5.48 | 7.47 | 5.82 | 5.47 |

表12 : Computation Times of Capacity Level 8 (seconds)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|------|-------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 0 | 0 | 0 | 5 | 49 | 483 | 4 | 39 | 394 |
| 20/230/040/V/T | 0 | 1 | 0 | 5 | 52 | 517 | 4 | 42 | 413 |
| 20/230/040/F/T | 0 | 1 | 0 | 5 | 51 | 508 | 4 | 41 | 416 |
| 20/230/200/V/L | 2 | 1033 | 602 | 33 | 333 | 3322 | 27 | 271 | 2723 |
| 20/230/200/F/L | 2 | 1246 | 1633 | 35 | 345 | 3442 | 29 | 290 | 2892 |
| 20/230/200/V/T | 2 | 1209 | 213 | 35 | 349 | 3469 | 28 | 282 | 2814 |
| 20/230/200/F/T | 2 | 1066 | 2119 | 33 | 336 | 3330 | 28 | 278 | 2828 |
| 20/300/040/V/L | 0 | 1 | 0 | 6 | 62 | 625 | 5 | 50 | 502 |
| 20/300/040/F/L | 0 | 1 | 0 | 7 | 65 | 653 | 5 | 54 | 529 |
| 20/300/040/V/T | 0 | 1 | 0 | 6 | 65 | 650 | 5 | 53 | 522 |
| 20/300/040/F/T | 0 | 1 | 0 | 7 | 66 | 674 | 5 | 54 | 533 |
| 20/300/200/V/L | 4 | 1203 | 956 | 44 | 438 | 4433 | 36 | 356 | 3584 |
| 20/300/200/F/L | 3 | 1654 | 3397 | 44 | 440 | 4419 | 36 | 368 | 3650 |
| 20/300/200/V/T | 3 | 925 | 315 | 44 | 441 | 4313 | 35 | 347 | 3495 |
| 20/300/200/F/T | 3 | 1340 | 2561 | 43 | 425 | 4290 | 36 | 354 | 3575 |
| 30/520/100/V/L | 3 | 59 | 4 | 34 | 342 | 3410 | 28 | 276 | 2747 |
| 30/520/100/F/L | 4 | 369 | 341 | 35 | 340 | 3420 | 29 | 284 | 2834 |
| 30/520/100/V/T | 2 | 40 | 3 | 35 | 355 | 3487 | 28 | 277 | 2797 |
| 30/520/100/F/T | 2 | 392 | 423 | 34 | 342 | 3421 | 29 | 279 | 2790 |
| 30/520/400/V/L | 22 | 21796 | 1180 | 175 | 1736 | 17240 | 128 | 1282 | 128013 |
| 30/520/400/F/L | 27 | 98191 | 9100 | 184 | 1769 | 17914 | 135 | 1321 | 132877 |
| 30/520/400/V/T | 21 | 18073 | 1210 | 183 | 1817 | 18170 | 130 | 1307 | 130494 |
| 30/520/400/F/T | 26 | 67579 | 10336 | 172 | 1695 | 17039 | 130 | 1273 | 128275 |
| 30/700/100/V/L | 3 | 47 | 5 | 47 | 450 | 4646 | 36 | 358 | 3606 |
| 30/700/100/F/L | 2 | 528 | 55 | 45 | 450 | 4509 | 37 | 368 | 3687 |
| 30/700/100/V/T | 3 | 160 | 9 | 46 | 463 | 4708 | 37 | 367 | 3732 |
| 30/700/100/F/T | 3 | 546 | 55 | 46 | 458 | 4600 | 38 | 372 | 3777 |
| 30/700/400/V/L | 38 | 28277 | 3781 | 236 | 2362 | 23529 | 173 | 1703 | 171252 |
| 30/700/400/F/L | 41 | 27069 | 21092 | 247 | 2408 | 24471 | 175 | 1751 | 180222 |
| 30/700/400/V/T | 36 | 27474 | 3181 | 228 | 2251 | 22693 | 168 | 1675 | 167312 |
| 30/700/400/F/T | 39 | 25700 | 12713 | 243 | 2476 | 24307 | 178 | 1755 | 177313 |
| Average | 10 | 10516 | 2429 | 76 | 749 | 7506 | 57 | 565 | 5691 |

表13 : Lower Bounds of Capacity Level 16

| Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|-------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 377766 | 389978 | 389978 | 389681 | 389966 | 389977 | 389679 | 389965 | 389978 |
| 20/230/040/V/T | 345638 | 355106 | 355106 | 354908 | 355034 | 355105 | 354947 | 355033 | 355105 |
| 20/230/040/F/T | 554366 | 597330 | 597330 | 596421 | 597005 | 597310 | 596544 | 597054 | 597328 |
| 20/230/200/V/L | 68822 | 90942 | 90942 | 89887 | 90813 | 90939 | 89517 | 90772 | 90933 |
| 20/230/200/F/L | 98373 | 131405 | 131405 | 129667 | 131153 | 131399 | 128455 | 130987 | 131382 |
| 20/230/200/V/T | 73981 | 100480 | 100480 | 99063 | 100270 | 100456 | 99027 | 100311 | 100473 |
| 20/230/200/F/T | 100672 | 139587 | 139587 | 137734 | 139317 | 139584 | 136543 | 139161 | 139575 |
| 20/300/040/V/L | 385944 | 402390 | 402390 | 402329 | 402378 | 402390 | 402335 | 402376 | 402390 |
| 20/300/040/F/L | 489346 | 528197 | 528197 | 527347 | 527815 | 528193 | 527310 | 527707 | 528192 |
| 20/300/040/V/T | 433329 | 445571 | 445571 | 445345 | 445442 | 445570 | 445251 | 445416 | 445570 |
| 20/300/040/F/T | 529643 | 582434 | 582434 | 581907 | 582191 | 582432 | 581891 | 582201 | 582432 |
| 20/300/200/V/L | 58869 | 80366 | 80366 | 79376 | 80235 | 80364 | 79062 | 80189 | 80359 |
| 20/300/200/F/L | 87898 | 122030 | 122030 | 120543 | 121734 | 122025 | 119120 | 121638 | 122018 |
| 20/300/200/V/T | 60443 | 79259 | 79259 | 77992 | 79078 | 79232 | 78290 | 79119 | 79248 |
| 20/300/200/F/T | 84359 | 114666 | 114666 | 113320 | 114381 | 114640 | 112146 | 114309 | 114648 |
| 30/520/100/V/L | 43667 | 55153 | 55153 | 54576 | 55061 | 55138 | 54853 | 55105 | 55153 |
| 30/520/100/F/L | 67022 | 93782 | 93782 | 92345 | 93568 | 93778 | 91731 | 93499 | 93771 |
| 30/520/100/V/T | 45422 | 55629 | 55629 | 55139 | 55537 | 55617 | 55339 | 55588 | 55627 |
| 30/520/100/F/T | 76232 | 110555 | 110555 | 109037 | 110199 | 110509 | 107836 | 110181 | 110530 |
| 30/520/400/V/L | 95113 | 127525 | 127525 | 126038 | 127284 | 127506 | 126105 | 127301 | 127513 |
| 30/520/400/F/L | 121338 | 173936 | 173936 | 171295 | 173473 | 173908 | 170323 | 173382 | 173898 |
| 30/520/400/V/T | 97666 | 133918 | 133918 | 132281 | 133582 | 133902 | 132475 | 133597 | 133912 |
| 30/520/400/F/T | 124363 | 177308 | 180524 | 177654 | 179956 | 180507 | 177033 | 179914 | 180505 |
| 30/700/100/V/L | 38956 | 49697 | 49697 | 49337 | 49659 | 49694 | 49487 | 49662 | 49694 |
| 30/700/100/F/L | 45699 | 61669 | 61669 | 60867 | 61554 | 61660 | 60736 | 61563 | 61661 |
| 30/700/100/V/T | 40024 | 49208 | 49208 | 48705 | 49154 | 49203 | 48850 | 49177 | 49207 |
| 30/700/100/F/T | 44568 | 62548 | 62548 | 61968 | 62474 | 62545 | 61831 | 62450 | 62540 |
| 30/700/400/V/L | 78144 | 115839 | 115839 | 113949 | 115414 | 115808 | 114214 | 115475 | 115833 |
| 30/700/400/F/L | 105648 | 151779 | 153063 | 149833 | 152427 | 153050 | 149637 | 152384 | 153049 |
| 30/700/400/V/T | 80138 | 114718 | 114718 | 112210 | 114292 | 114685 | 113087 | 114420 | 114709 |
| 30/700/400/F/T | 107544 | 153747 | 153748 | 151456 | 153273 | 153718 | 150352 | 153197 | 153729 |

表14 : Gaps Bounds of Capacity Level 16 (%)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|-------|------|------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 3.29 | 0.06 | 0.06 | 0.13 | 0.06 | 0.06 | 0.14 | 0.06 | 0.06 |
| 20/230/040/V/T | 3.00 | 0.26 | 0.26 | 0.31 | 0.28 | 0.26 | 0.30 | 0.28 | 0.26 |
| 20/230/040/F/T | 8.23 | 0.44 | 0.44 | 0.59 | 0.50 | 0.44 | 0.57 | 0.49 | 0.44 |
| 20/230/200/V/L | 36.37 | 3.20 | 3.20 | 4.41 | 3.34 | 3.20 | 4.84 | 3.39 | 3.21 |
| 20/230/200/F/L | 38.86 | 3.95 | 3.95 | 5.34 | 4.15 | 3.96 | 6.34 | 4.28 | 3.97 |
| 20/230/200/V/T | 39.60 | 2.78 | 2.78 | 4.25 | 3.00 | 2.81 | 4.29 | 2.96 | 2.79 |
| 20/230/200/F/T | 45.12 | 4.66 | 4.66 | 6.07 | 4.86 | 4.66 | 6.99 | 4.98 | 4.67 |
| 20/300/040/V/L | 4.42 | 0.15 | 0.15 | 0.17 | 0.16 | 0.15 | 0.17 | 0.16 | 0.15 |
| 20/300/040/F/L | 8.97 | 0.95 | 0.95 | 1.11 | 1.02 | 0.95 | 1.12 | 1.04 | 0.95 |
| 20/300/040/V/T | 3.21 | 0.38 | 0.38 | 0.43 | 0.41 | 0.38 | 0.45 | 0.41 | 0.38 |
| 20/300/040/F/T | 10.57 | 0.55 | 0.55 | 0.64 | 0.59 | 0.55 | 0.64 | 0.59 | 0.55 |
| 20/300/200/V/L | 41.32 | 3.52 | 3.52 | 4.81 | 3.69 | 3.53 | 5.23 | 3.75 | 3.53 |
| 20/300/200/F/L | 46.69 | 5.66 | 5.66 | 6.96 | 5.91 | 5.66 | 8.24 | 6.00 | 5.67 |
| 20/300/200/V/T | 33.71 | 1.97 | 1.97 | 3.63 | 2.20 | 2.00 | 3.23 | 2.15 | 1.98 |
| 20/300/200/F/T | 42.20 | 4.61 | 4.61 | 5.86 | 4.87 | 4.64 | 6.96 | 4.94 | 4.63 |
| 30/520/100/V/L | 28.32 | 1.60 | 1.60 | 2.67 | 1.77 | 1.63 | 2.15 | 1.69 | 1.60 |
| 30/520/100/F/L | 46.49 | 4.69 | 4.69 | 6.32 | 4.93 | 4.69 | 7.03 | 5.01 | 4.70 |
| 30/520/100/V/T | 23.73 | 1.02 | 1.02 | 1.92 | 1.19 | 1.05 | 1.55 | 1.10 | 1.03 |
| 30/520/100/F/T | 50.65 | 3.88 | 3.88 | 5.32 | 4.21 | 3.92 | 6.50 | 4.23 | 3.90 |
| 30/520/400/V/L | 37.71 | 2.71 | 2.71 | 3.92 | 2.91 | 2.73 | 3.87 | 2.89 | 2.72 |
| 30/520/400/F/L | 49.55 | 4.32 | 4.32 | 5.93 | 4.60 | 4.34 | 6.54 | 4.66 | 4.35 |
| 30/520/400/V/T | 43.45 | 4.62 | 4.62 | 5.91 | 4.88 | 4.63 | 5.76 | 4.87 | 4.62 |
| 30/520/400/F/T | 54.12 | 8.10 | 6.18 | 7.89 | 6.51 | 6.19 | 8.27 | 6.54 | 6.19 |
| 30/700/100/V/L | 28.96 | 1.09 | 1.09 | 1.83 | 1.16 | 1.09 | 1.52 | 1.16 | 1.09 |
| 30/700/100/F/L | 38.17 | 2.39 | 2.39 | 3.74 | 2.58 | 2.40 | 3.96 | 2.56 | 2.40 |
| 30/700/100/V/T | 24.16 | 0.99 | 0.99 | 2.03 | 1.10 | 1.00 | 1.73 | 1.05 | 0.99 |
| 30/700/100/F/T | 43.60 | 2.32 | 2.32 | 3.28 | 2.44 | 2.33 | 3.51 | 2.48 | 2.33 |
| 30/700/400/V/L | 57.16 | 6.02 | 6.02 | 7.78 | 6.41 | 6.05 | 7.53 | 6.35 | 6.03 |
| 30/700/400/F/L | 56.73 | 9.09 | 8.18 | 10.51 | 8.63 | 8.19 | 10.66 | 8.66 | 8.19 |
| 30/700/400/V/T | 49.52 | 4.45 | 4.45 | 6.79 | 4.84 | 4.48 | 5.96 | 4.72 | 4.46 |
| 30/700/400/F/T | 51.38 | 5.89 | 5.89 | 7.49 | 6.22 | 5.91 | 8.28 | 6.27 | 5.90 |
| Average | 33.85 | 3.11 | 3.02 | 4.13 | 3.21 | 3.03 | 4.33 | 3.22 | 3.02 |

表15 : Computation Times of Capacity Level 16 (seconds)

| Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity | LP-W | LP-S | LP-P | LF | | | LC | | |
|--------------------------------------|------|--------|-------|-------|--------|---------|-------|--------|---------|
| | | | | F1000 | F10000 | F100000 | C1000 | C10000 | C100000 |
| 20/230/040/V/L | 1 | 1 | 0 | 9 | 86 | 861 | 8 | 76 | 748 |
| 20/230/040/V/T | 1 | 1 | 0 | 9 | 90 | 916 | 9 | 84 | 851 |
| 20/230/040/F/T | 1 | 2 | 0 | 9 | 88 | 889 | 8 | 81 | 811 |
| 20/230/200/V/L | 5 | 5209 | 288 | 59 | 571 | 5874 | 53 | 524 | 5229 |
| 20/230/200/F/L | 6 | 8311 | 1077 | 60 | 597 | 6062 | 56 | 554 | 5546 |
| 20/230/200/V/T | 6 | 3813 | 88 | 59 | 594 | 5921 | 53 | 534 | 5340 |
| 20/230/200/F/T | 6 | 3579 | 2272 | 58 | 596 | 5867 | 54 | 534 | 5184 |
| 20/300/040/V/L | 1 | 1 | 0 | 11 | 114 | 1093 | 10 | 99 | 993 |
| 20/300/040/F/L | 1 | 2 | 0 | 12 | 115 | 1174 | 11 | 107 | 1070 |
| 20/300/040/V/T | 1 | 2 | 0 | 11 | 118 | 1179 | 10 | 105 | 1044 |
| 20/300/040/F/T | 1 | 2 | 0 | 12 | 115 | 1155 | 10 | 101 | 1011 |
| 20/300/200/V/L | 8 | 9640 | 575 | 76 | 755 | 7547 | 67 | 681 | 6814 |
| 20/300/200/F/L | 7 | 7978 | 2323 | 75 | 750 | 7451 | 68 | 690 | 6895 |
| 20/300/200/V/T | 8 | 3199 | 160 | 76 | 748 | 7546 | 68 | 680 | 6813 |
| 20/300/200/F/T | 7 | 7421 | 2080 | 76 | 750 | 7586 | 67 | 689 | 6685 |
| 30/520/100/V/L | 6 | 77 | 2 | 59 | 599 | 5954 | 54 | 558 | 5392 |
| 30/520/100/F/L | 6 | 1120 | 343 | 60 | 592 | 5820 | 55 | 532 | 5439 |
| 30/520/100/V/T | 5 | 63 | 2 | 59 | 595 | 6222 | 56 | 537 | 5409 |
| 30/520/100/F/T | 5 | 1162 | 217 | 59 | 582 | 6047 | 55 | 528 | 5320 |
| 30/520/400/V/L | 44 | 50535 | 456 | 319 | 3105 | 31755 | 258 | 2524 | 25203 |
| 30/520/400/F/L | 48 | 22417 | 4613 | 312 | 3107 | 31511 | 252 | 2484 | 25188 |
| 30/520/400/V/T | 47 | 29073 | 537 | 309 | 3011 | 30717 | 251 | 2481 | 24559 |
| 30/520/400/F/T | 48 | 108000 | 4856 | 306 | 3002 | 30183 | 250 | 2500 | 24700 |
| 30/700/100/V/L | 8 | 82 | 2 | 79 | 758 | 7937 | 71 | 708 | 6958 |
| 30/700/100/F/L | 5 | 1050 | 24 | 78 | 797 | 7936 | 70 | 715 | 7133 |
| 30/700/100/V/T | 8 | 96 | 3 | 79 | 796 | 8032 | 73 | 726 | 7158 |
| 30/700/100/F/T | 8 | 547 | 19 | 78 | 783 | 8037 | 73 | 725 | 7250 |
| 30/700/400/V/L | 61 | 96762 | 1383 | 402 | 4090 | 41156 | 331 | 3316 | 33151 |
| 30/700/400/F/L | 69 | 108000 | 35853 | 408 | 4079 | 41713 | 336 | 3320 | 33621 |
| 30/700/400/V/T | 64 | 48883 | 1273 | 402 | 4188 | 42108 | 334 | 3278 | 32934 |
| 30/700/400/F/T | 67 | 108000 | 9274 | 420 | 4181 | 42624 | 329 | 3275 | 33651 |
| Average | 18 | 20162 | 2184 | 130 | 1302 | 13190 | 110 | 1089 | 10906 |