《論　文》

大規模インスタンスに対するいくつかのネットワーク設計モデルの数値実験

片　山　直　登

1．はじめに

ネットワーク設計モデルは，ネットワーク全体の費用を最小化するようにノードまたはアークを選択してネットワークを形成し，ネットワーク上のフローを求めるモデル（Magnanti and Wong 1984, Wong 1984, Minoux 1989）であり，現実の問題に即した様々な条件を付与したモデルが数多く提案されている．

容量制約をもつネットワーク設計モデル（Ghamlouche et al. 2003, Crainic et al. 2006, Katayama et al. 2009, Hewitt et al. 2010, Katayama 2015）は，複数の始点と複数の終点をもつ多品種とアーク上を流れる量の上限であるアーク容量を考慮した基本的な設計モデルである．アセットバランスネットワーク設計モデル（Pedersen et al. 2009, Chouman and Crainic 2011, Vu et al. 2013, Bai et al. 2018, Crainic et al. 2018, Hewitt et al. 2019, Katayama 2020, Li et al. 2021）は，ネットワーク上のアセットのバランスを考慮した設計モデルである．一般にアセットは配送車両を表しており，アセットバランス制約式により，ネットワーク上で配送車両の巡回路やスケジューリングを考慮することができる．シングルパスフローネットワーク設計モデル（Yaghini and Kazemzadeh 2012, Hewitt et al. 2013, 片山 2018）は，始点・終点間をフローが流れるパスを一意とする設計モデルである．すなわち，同じ発地と着地をもつ荷物は，経由するノードである施設で分岐することなく，次の同一の施設へ輸送されることを表している．このモデルは，フローを表す変数も0-1条件をもつため，容量制約をもつネットワーク設計モデルよりもさらに困難なモデルとなる．木フローネットワーク設計モデル（Farvolden and Powell 1994, Hoppe et al. 1999, Jarrah et al. 2009, Erera et al. 2013, 片山 2016）は，同一終点をもつフローが同一終点を根とする木を構成するアーク上を流れることを条

件とするモデルである．現実の輸送問題では，同一終点をもつフロー，すなわち着地が同じ荷物は，経由する施設で異なる発地からの荷物と合流するが，分岐はせずに次の同一の施設へ輸送される．木条件は，このような状況を表している．その他に，始点・終点間のフローが経由するノード数であるホップ数を制限するモデル（Thiongane et al. 2015, Katayama 2016），需要の不確実性を考慮するモデル（Rahmaniani et al. 2018, Crainic et al. 2021b, Sarayloo et al. 2023），複数種類のアセットを考慮するモデル（Crainic et al. 2018）など多くの派生モデルが存在している．

ネットワーク設計モデルには多くのサーベイ（Gendron et al. 2016, Yaghini et al. 2016, Mejri et al. 2023）が行われている．近年，ネットワーク設計モデルをまとめた書籍（Crainic et al. 2021a）が出版され，これには多様なモデルのサーベイが記載されている．

ネットワーク設計モデルでは，小規模または中規模のインスタンスであるＣインスタンスやＲインスタンスが公開されており，これらのベンチマーク問題を用いてモデルの性質の分析や解法の比較が行われている．一方，大規模なインスタンスをもつベンチマーク問題であるGTインスタンスも公開されている．このGTインスタンスを用いた研究は少なく，基本的な容量制約をもつネットワーク設計モデルに関する研究としては Hewitt et al. (2010), Munguía et al. (2017), Katayama (2020)や Roccaetal. (2024) がある．

本論文では，容量制約をもつネットワーク設計モデル，アセットバランスネットワーク設計モデル，シングルパスフローネットワーク設計モデル，および木フローネットワーク設計モデルを対象とし，ネットワーク設計モデルに対する大規模なベンチマーク問題であるGTインスタンスを汎用の最適化ソルバーで解くという数値実験を行い，それぞれの付加的な条件がモデルの上界値と下界値の算出に与える影響を明らかにする．

２．定式化

２．１　前提条件と定義

はじめに，基本的な容量制約をもつネットワーク設計モデルの前提条件を示す．

・ノード集合が与えられる．

・向きをもつアーク候補集合が与えられる．

・品種集合が与えられる．

・品種は異なる始点・終点をもち，始点・終点の対で表す．

・各品種に需要量が与えられる．

・アークにアーク容量が与えられる．

・アーク上を流れるフロー量は，アーク容量以下である．

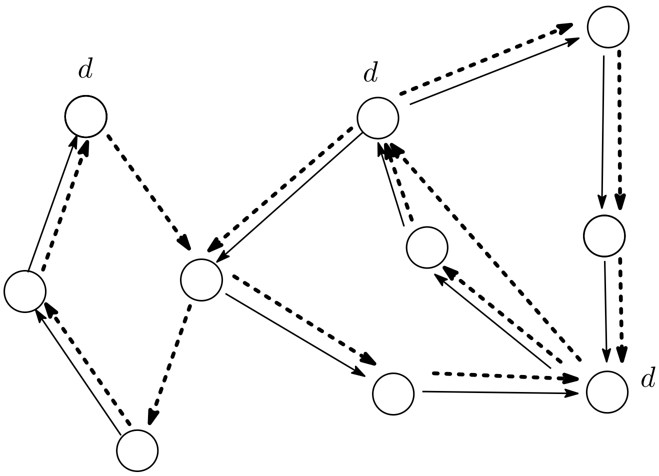

図１　Asset Balance

・アークを設置したときに発生する固定費用であるアーク費用が発生する．
・アーク上を移動するフローに対して，品種ごとの単位当たりの変動費用であるフロー費用が発生する．
・フロー費用とアーク費用の総和を最小化するアークの選択と各品種のフローを求める．

アセットバランスネットワーク設計モデルでは，次の条件が付加される．
・アークをアセットとしてとらえ，各ノードにおいてアークを終点とするアセット数の合計と当該アークを始点とするアセット数の合計が一致する．

図１の破線はアセット，実線はフローを表している．当該ノードを終点とするアセット数の合計と当該ノードを始点とするアセット数の合計が一致しており，アセットはネットワーク上で巡回路を形成する．なお，ノードが離散的な時間的要素を含む場合，アセットバランスを行うことによってアセットのスケジュールを考慮することができる．

シングルパスフローネットワーク設計モデルでは，次の条件が付加される．
・同一の始点と終点をもつ品種のフローは，単一のパス上を流れる．

図２は始点 o，終点 d 間の品種のフローであり，太線と破線を含む２つのパスにフローが分岐しているため，シングルパスフローではない．このフローがシングルパスフロー条件を満たすためには，破線または太線のアーク上のフローを取り除く必要がある．

木フローネットワーク設計モデルでは，次の条件が付加される．
・同一の終点をもつ品種のフローは，終点を根とする木上を流れる．

同一ノードを終点とする品種のフローは終点を根とする木上を流れ，経由するノードで合流はするが分岐はしない．図３は終点を d とする品種のフローである．太線と破線

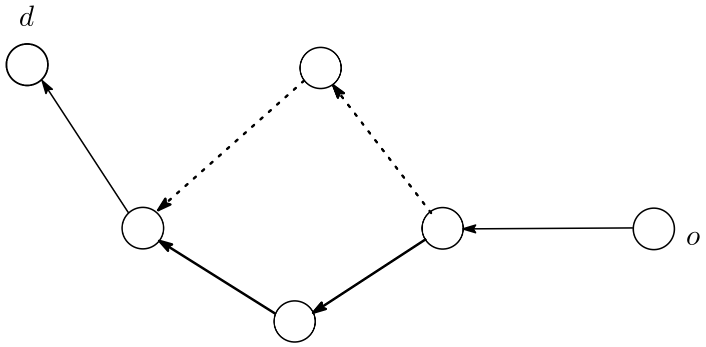

図 2　Single Path Flow

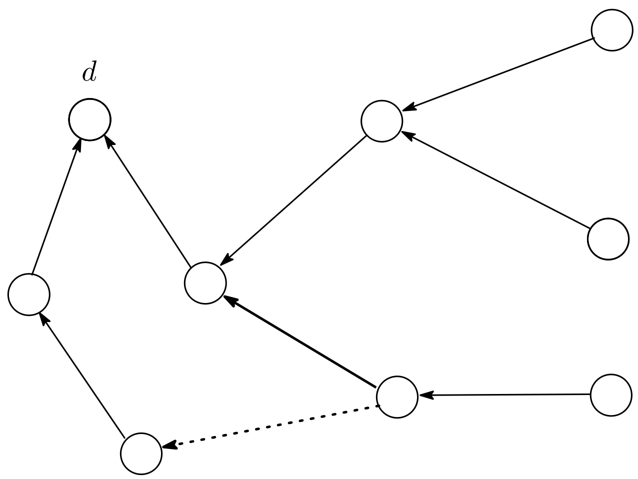

図 3　Tree Flow

のフローは途中で分岐しているため，フローは木条件を満たしていない．このフローが木条件を満たすためには，破線または太線のアーク上のフローを取り除く必要がある．

次に，本研究で対象とするネットワーク設計モデルで使用する集合とパラメータを示す．

・N：ノード集合

・A：アーク集合

・D：品種の終点集合

・O^d：終点を d とする品種の始点集合

・N_n^+：ノード n を終点とするアークの始点であるノード集合
・N_n^-：ノード n を始点とするアークの終点であるノード集合
・q^{od}：始点を o，終点を d とする品種（o, d）の需要量
・c_{ij}^{od}：アーク（i, j）上の品種（o, d）の単位当たりのフロー費用
・f_{ij}：アーク（i, j）のアーク費用
・b_{ij}：アーク（i, j）のアーク容量

最後に，使用する変数を示す．

・x_{ij}^{od}：品種（o, d）がアーク（i, j）上を流れる比率，または流れる場合１，そうでないとき０であるアークフロー変数
・y_{ij}：アーク（i, j）上にアークが設置されるとき１，そうでないとき０であるアーク変数
・t_{ij}^{d}：終点を d とする品種のフローから構成される木がアーク（i, j）を含むとき１，そうでないとき０である木変数

２．２　容量制約をもつネットワーク設計モデルの定式化

はじめに，基本的な容量制約をもつネットワーク設計モデルのアークフローを用いた定式化 CND を示す．

CND：

目的関数である(1)式は，フロー費用とアーク費用の合計である総費用であり，これを最小化する．(2)式は，アークフロー保存式である．この式は，アーク（i, j）上の始

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^{od} - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & if\ n = o \\ 1 & if\ n = d \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n \in N, o \in O^d, d \in D, \tag{2}$$

$$\sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} x_{ij}^{od} \le b_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A, \tag{3}$$

$$x_{ij}^{od} \le y_{ij} \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i,j) \in A, \tag{4}$$

$$x_{ij}^{od} \ge 0 \quad \forall o \in O^d, d \in D, (i,j) \in A, \tag{5}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A. \tag{6}$$

点 o と終点 d をもつ品種（o, d）について，ノード n に入るフロー量とノード n から出るフロー量の差が，ノード n が始点 o であれば－1，終点 d であれば1，それ以外のノードであれば0であることを表す．この式により，始点・終点間に需要が流れることが保証される．(3)式は，アーク容量の制約式である．左辺はアーク（i, j）上のフロー量の合計であり，右辺はアーク変数が1のときにアークフロー量の合計がアーク容量以下となり，アーク変数が0のときに0となることを表す，(4)式は，アーク(i, j)と品種に関する強制制約式である．これは，アーク(i, j)において，アーク変数が1のときに品種(o, d)のフローが存在し，そうでないときはフロー量が0となることを表す．(5)式がフロー変数の非負条件，(6)式はアーク変数の0-1条件を表す．

2．3　アセットバランスネットワーク設計モデルの定式化

アセットバランスネットワーク設計モデルのアークフローを用いた定式化 *AND* を示す．

AND：

AND では *CND* にアセットバランス制約式である(8)式が追加されている．(8)式はノード n において，n を終点とするアーク変数の合計値と n を始点とするアーク変数の

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{d\in D}\sum_{o\in O^d} q^{od}c_{ij}^{od}x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} \tag{7}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} y_{in} - \sum_{j\in N_n^-} y_{nj} = 0 \quad \forall n \in N, \tag{8}$$

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^{od} - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=d \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n\in N, o\in O^d, d\in D, \tag{9}$$

$$\sum_{d\in D}\sum_{o\in O^d} q^{od}x_{ij}^{od} \le b_{ij}y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A, \tag{10}$$

$$x_{ij}^{od} \le y_{ij} \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{11}$$

$$x_{ij}^{od} \ge 0 \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{12}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A. \tag{13}$$

合計値が一致することを表し，アセットがネットワーク上で巡回することを表す．

2．4　シングルパスフローネットワーク設計モデルの定式化

シングルパスフローネットワーク設計モデルのアークフローを用いた定式化 *SND* を示す．

CND と *SND* では(18)式が異なっている．*CND* ではフロー変数が非負の連続変数であるが, *SND* ではフロー変数が0または1の離散値をとる．*CND* では0-1変数が $O(|N|^2)$

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{14}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^{od} - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=d \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n\in N, o\in O^d, d\in D, \tag{15}$$

$$\sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} x_{ij}^{od} \le b_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A, \tag{16}$$

$$x_{ij}^{od} \le y_{ij} \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{17}$$

$$x_{ij}^{od} \in \{0,1\} \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{18}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A. \tag{19}$$

個である．一方，*SND* ではフロー変数は $O(|N|^4)$ 個存在するため，0-1変数は $O(|N|^4)$ となる．このため，同じインスタンスの場合であっても，*SND* は *CND* と比べて大規模な離散最適化問題となる．

2．5　木フローネットワーク設計モデルの定式化

木フローネットワーク設計モデルのアークフローを用いた定式化 *TND* を示す．

TND：

TND では木フローを表現するために，木変数 t_{ij}^d を使用する．(24)式はアーク (i, j)，品種(o, d)における木フロー制約式である．これは，アーク(i, j)において，終点を d と

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} c_{ij}^{od} x_{ij}^{od} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{20}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^{od} - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^{od} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=d \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \forall n\in N, o\in O^d, d\in D, \tag{21}$$

$$\sum_{d\in D} \sum_{o\in O^d} q^{od} x_{ij}^{od} \le b_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A, \tag{22}$$

$$x_{ij}^{od} \le y_{ij} \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{23}$$

$$x_{ij}^{od} \le t_{ij}^d \quad \forall o\in O^d, d\in D, (i,j)\in A, \tag{24}$$

$$t_{ij}^d \le y_{ij} \quad \forall d\in D, (i,j)\in A, \tag{25}$$

$$\sum_{j\in N_i^+} t_{ij}^d \le 1 \quad \forall i\in N, d\in D, \tag{26}$$

$$x_{ij}^{od} \in \{0,1\} \qquad \forall o \in O^d, d \in D, (i,j) \in A, \tag{27}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A, \tag{28}$$

$$t_{ij}^{d} \in \{0,1\} \quad \forall d \in D, (i,j) \in A. \tag{29}$$

する品種の木変数が１のときに品種$(o,\ d)$のフローが存在し，そうでないときはフローが存在しないことを表す．(25)式はアーク$(i,\ j)$，終点dにおける木アーク制約式である．これは，アーク$(i,\ j)$のアーク変数が１のときに限り，アーク$(i,\ j)$上の木変数が１を取りうることを表す．(26)式は終点d，ノードiにおける木制約式であり，終点をdとするノードiを始点とするアークの木変数は高々１本となる．(27)式から（29)式は，変数の0-1条件である．0-1変数である木変数が加わることから，*TND* は *SND* と比べて大規模な離散最適化問題となる．

３．数値実験

容量制約をもつネットワーク設計モデルで用いられるベンチマーク問題である GT インスタンス（Hewitt 2010）の24問に対して，それぞれのアークフローによる定式化を汎用の最適化ソルバーを用いて解を求める数値実験を行った．

GT インスタンスは，アーク容量特性，アーク数，品種数で分類される．アーク容量特性では，FL はアーク容量に対してフロー量が相対的に緩いインスタンスであり，FT は相対的にタイトなインスタンスである．なお，ノード数はすべて500である．

数値実験で使用した機器と最適化ソルバーの計算時間の上限を示す．

・使用 OS および言語：UBUNTU 22.04，C++
・最適化ソルバー：Gurobi 11.0
・CPU AMD Ryzen 9-3950X，16コア，16スレッド
・RAM 64GByte
・計算時間：10時間

なお，CPU は32スレッドの並列計算が可能であるが，コア数にあわせて16スレッドとした．

最適化ソルバー Gurobi を用いてアークフローによる定式化を解き，10時間の計算時間の上限に達した時点における最良の上界値と下界値を算出する．

表１に，GT インスタンスの要素数を示す．GT インスタンスのノード数は500，アーク数は2000から3000，品種数は50から200，需要の終点は39から117である．表２に，各モデルにおける GT インスタンスにおける変数および制約式の数を示す．*CND* では

0-1変数が2000から3000，連続変数が10万から60万，制約式が約10万から約60万であり，*AND*では0-1変数が約4000から約6000，連続変数が約20万から約120万，制約式が約10万から約60万である．また，*SND*では0-1変数が約10万から約60万，制約式が約10万から約60万であり，*TND*では0-1変数が18万から約95万，制約式が約28万から約160万である．*SND*と*TND*では，アークフロー変数と木変数が0-1変数に加わっているため，*CND*や*AND*に比べて0-1変数の数は多くなっている．

GTインスタンスには，同じ端点をもつアークが含まれていることがある．この場合，本研究では，リスト順で後位にあるアークを採用した．また，アセットバランスモデルでは，与えられたアークのみではアセットがバランスせずに，実行不可能となるインスタンスが大半であった．そこで，*AND*では，実行可能解を算出するために，与えられたアークの逆向きのアークが存在しない場合，アーク費用，フロー費用およびアーク容量が0である逆向きのアークを付加した．このため，*AND*では，他のモデルと比較してアーク変数が約2倍となり，0-1変数の数も*CND*に対して約2倍となっている．なお，*AND*において付加したアーク容量が0であるアーク上のフロー変数を考慮する必要はないが，表2では連続変数の数に含めている．

表3に各モデルのGTインスタンスに対する誤差の平均値を示す．なお，誤差は「(上界値－下界値)/下界値」の平均値で算出している．*SND*の平均誤差は19.3%と最も小さく，続いて*AND*の23.1%，*TND*の23.3%，*CND*の24.3%となった．4つのモデルの中では，最も困難でないと想定される*CND*の平均誤差が最も大きく，0-1変数を多く含むことから最も困難と想定される*SND*の平均誤差が最も小さくなっている．な

表1　Number of Nodes, Arcs, Commodities and Destinations

Nodes	Arcs	Commodities	Destination
500	2,000-3,000	50-200	39-117

表2　Number of Variables and Constraints for Models

	BinaryVariables	ContinuousVariables	Constraints
CND	2,000-3,000	100,000-600,000	104,500-613,000
AND	3,968-5,976	198,400-1,195,200	104,550-613,050
SND	102,000-603,000	0	104,500-613,000
TND	180,000-954,000	0	284,450-1,569,850

表3　Average Gaps for GT Instances (%)

Type	CND	AND	SND	TND
Average	24.3	23.1	19.3	23.3

お，*AND* にはアークを付加しているため，他のモデルのものとインスタンスの構造が大きく異なっていることから，直接的な比較をすることは適切ではない．

図 4 にモデル別・アーク数別の平均誤差を示す．いずれのモデルにおいても，アーク数が増えると誤差は増大するが，2000アークと3000アークの間ではそれほど大きな差はみられない．*CND* と *SND* を比較すると，アーク数に関わらず *SND* の平均誤差が小さく，顕著な差が見られる．*CND* と *TND* を比較すると，平均誤差に大きな差は見られない．図 5 にモデル別・品種数別の平均誤差を示す．*CND* と *SND* を比較すると，品種数に関わらず *SND* の平均誤差が小さく，顕著な差が見られる．*CND* と *TND* を比較すると，100品種までは平均誤差に大きな差は見られないが，150 品種以上では *TND* の平均誤差が小さくなっている．

表 4 は *CND* におけるアーク数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．アーク数の増加とともに平均誤差は増加している．ノード数2000では FL の方が平均誤差が小さいが，ノード数2500以上では FT の方が平均誤差が小さくなっている．表 5 は *CND* における品種数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．品種数の増加とともに平均誤差は増加している．また，品種数 100までは FL の方が平均誤差が小さいが，品種数150以上では FT の方が平均誤差が小さくなっている．

表 6 は *AND* におけるアーク数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．アーク数の増加とともに平均誤差は増加している．また，ノード数2000では FL の方が平均誤差が小さいが，ノード数2500以上では FT の方が平均誤差が小さくなっている．表 7 は *AND* における品種数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．品種数の増加

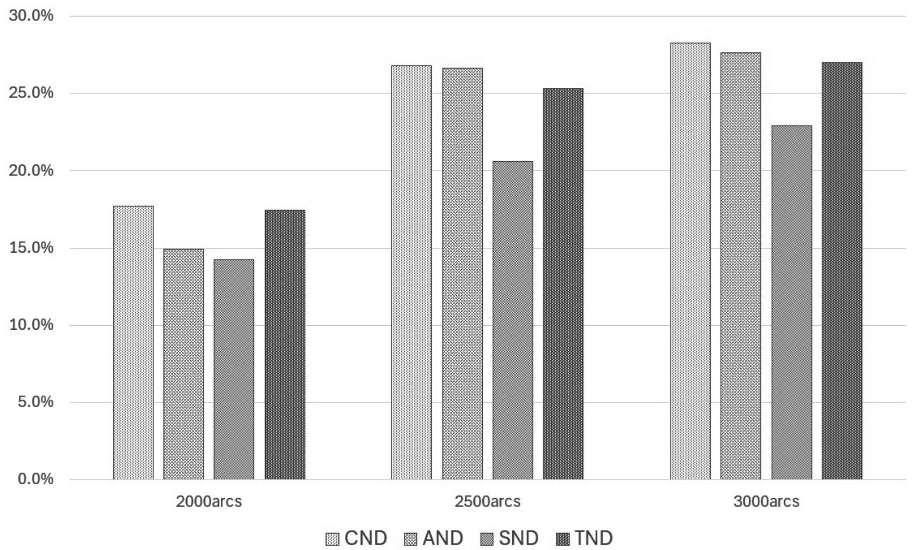

図 4　Errors of Models with Respect to Arcs

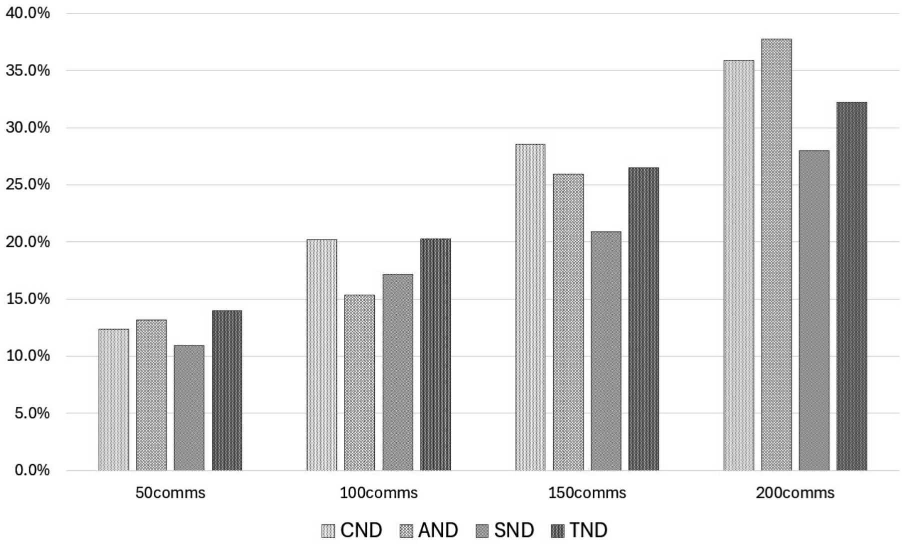

図 5　Errors of Models with Respect to mmodities

表 4　Average Gaps of CND with Respect to Arcs（%）

Arcs	2000	2500	3000	Average
FL	15.2	27.7	29.7	24.2
FT	20.2	26.0	26.9	24.3
Average	17.7	26.8	28.3	24.3

表 5　Average Gaps of CND with Respect to Commodities（%）

Commodities	50	100	150	200	Average
FL	8.1	18.5	33.6	36.6	24.2
FT	16.6	22.0	23.6	35.2	24.3
Average	12.4	20.2	28.6	35.9	24.3

表 6　Average Gaps of AND with Respect to Arcs（%）

Arcs	2000	2500	3000	Average
FL	14.0	30.1	31.0	25.0
FT	15.9	23.2	24.4	21.1
Average	14.9	26.6	27.7	23.1

とともに平均誤差は増加している．また，品種数100まではFLの方が平均誤差が小さいが，品種数150以上ではFTの方が平均誤差が小さくなっている．

表８は*SND*におけるアーク数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．アーク数の増加とともに平均誤差は増加している．また，すべてのノード数でFLの方が平均誤差が小さいが，ノード数3000では大きな差はみられない．表９は*SND*における品種数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．品種数の増加とともに平均誤差は増加している．また，品種数150以外はFLの方が平均誤差が小さい．

表10は*TND*におけるアーク数とアーク容量特性による平均誤差の比較である．アーク数の増加とともに平均誤差は増加しているが，アーク数2500と3000では大きな差はみられない．また，FLの方が平均誤差がFTの平均誤差よりも小さいが，ノード数2500以上では大きな差はみられない．表11は*TND*における品種数とアーク容量特性による

表７　Average Gaps of AND with Respect to Commodities（%）

Commodities	50	100	150	200	Average
FL	8.1	13.0	36.7	42.3	25.0
FT	18.3	17.8	15.2	33.3	21.1
Average	13.2	15.4	25.9	37.8	23.1

表８　Average Gaps of SND with Respect to Arcs（%）

Arcs	2000	2500	3000	Average
FL	11.8	20.1	22.9	18.3
FT	16.8	21.1	23.0	20.3
Average	14.3	20.6	22.9	19.3

表９　Average Gaps of SND with Respect to Commodities（%）

Commodities	50	100	150	200	Average
FL	9.1	15.7	22.0	26.2	18.3
FT	12.7	18.7	19.8	29.8	20.3
Average	10.9	17.2	20.9	28.0	19.3

表10　Average Gaps of TND with Respect to Arcs（%）

Arcs	2000	2500	3000	Average
FL	15.1	25.3	27.0	22.5
FT	19.7	25.4	26.9	24.0
Average	17.4	25.4	27.0	23.3

平均誤差の比較である．品種数の増加とともに平均誤差は増加する傾向があるが，FLでは品種数150よりも品種数200の平均誤差が小さくなっている．また，品種数150以外はFLの方が平均誤差が小さくなっている．

表12は *CND* の下界値の平均を100.0% としたとき，各モデルで求められた下界値の相対的な値である．下界値については，いずれのモデルも100.0% に近い値となっている．*SND* と *TND* の線形緩和問題は *CND* の線形緩和問題に帰着される．下界値は線形緩和解をもとにして算出するため，3つのモデルの下界値に大きな違いは見られない．

表13は *CND* の上界値の平均を100.0% としたとき，各モデルで求められた上界値の相対的な値である．*SND* および *TND* は100% 未満となっており，*CND* よりも小さな上界値が求められている．特に *SND* では，FLにおいて94.1%，FTにおいて97.5%，全体平均で95.9% であり，全体平均で4.1% 良い上界値を得ている．*AND* と *TND* では，いずれも全体平均で 1.2% 良い上界値を得ている．

表14はFL，500ノード，3000アーク，200品種の *CND* と *SND* に対する時間経過による上界値(UB)，下界値(LB)と誤差(GAP)の推移である．このインスタンスにおいて，*CND* では1895秒と2542秒に上界値が2回更新されている．一方，SNDでは上界値が5回更新され，5867秒に *CND* よりも良い上界値が求まり，21458秒に最良の上界値を算出している．また，*CND* は *SND* の緩和問題であるので，*SND* の最良の上界値は *CND*

表11　Average Gaps of TND with Respect to Commodities（%）

Commodities	50	100	150	200	Average
FL	10.4	18.8	30.7	30.0	22.5
FT	17.6	21.7	22.3	34.5	24.0
Average	14.0	20.3	26.5	32.2	23.3

表12　Average LB of Models Rrelative to Average LB of CND（%）

Types	CND	AND	SND	TND
FL	100.0	100.0	99.9	100.0
FT	100.0	99.4	101.0	100.1
Average	100.0	99.7	100.5	100.1

表13　Average UB of Models Relative to Average UB of CND（%）

Types	CND	AND	SND	TND
FL	100.0	101.3	94.1	98.0
FT	100.0	96.5	97.5	99.7
Average	100.0	98.8	95.9	98.8

表14　UBs, LBs and Gaps According to Computation Time for FL-3000-200 Instance

Time（s）	CND-UB	CND-LB	GAP（%）	SND-UB	SND-LB	GAP（%）
1,828				−	7,430,303	−
1,852	−	7,430,303	−			
1,895	16,821,660	7,430,303	126.4			
2,464				11,232,970	7,430,303	51.2
2,466				10,993,010	7,430,303	47.9
2,542	10,677,664	7,430,303	43.7			
5,867				10,219,770	7,430,329	37.5
6,902	10,677,664	7,430,305	43.7			
10,264				10,007,140	7,430,355	34.7
21,458				9,965,541	7,430,880	34.1
36,000	10,677,664	7,436,128	43.6	9,965,541	7,430,896	34.1

の上界値でもある．なお，他のインスタンスにおいても，同様な傾向がみられる．

Gurobi にはヒューリスティクスアルゴリズムが組み込まれており，0–1変数の多い *SND* や *TND* に対して，このヒューリスティクスアルゴリズムが有効に機能していると考えられる．

表15に，各インスタンスに対する各モデルの下界値（LB），上界値（UB）および誤差（GAP）を示す．

4．おわりに

本論文では，容量制約をもつネットワーク設計モデル，アセットバランスネットワーク設計モデル，シングルパスフローネットワーク設計モデル，および木フローネットワーク設計モデルにおいて，汎用の最適化ソルバーを用いて GT インスタンスに対する数値実験を行い，それぞれの付加的な条件がモデルの上界値と下界値の算出に与える影響を分析した．

10時間という計算時間制限の下で，誤差の比較という視点から *CND*，*SND* と *TND* を比較すると，アーク数・品種数に関わらず，*SND* の平均誤差が小さく，続いて *TND* の平均誤差が小さく，*CND* の平均誤差が最も大きい傾向が見られた．*CND* は *SND* のアークフローの0–1条件を緩和した緩和問題であり，*SND* の実行可能解は *CND* の実行可能解でもある．モデルの困難性の観点からは，*SND* の方が *CND* よりも困難であると考えられる．しかしながら，今回の数値実験では，規模が大きなインスタンスでは，*SND* の方が良い上界値を見つけることができている．これは，Gurobi のヒューリスティクスアルゴリズムが0–1変数の多い *SND* に対して良い上界値の探索に成功してい

表15　Results for GT Instances

Type	Arcs	Commodities	CND			AND			SND			TND		
			LB	UB	GAP	LB	UB	GAP	LB	UB	GAP	LB	UB	GAP
FL	2000	50	3,480,355	3,713,272	6.7	3,493,802	3,721,779	6.5	3,491,454	3,725,846	6.7	3,469,060	3,780,539	9.0
FL	2000	100	5,627,934	6,255,421	11.1	5,627,934	6,278,759	11.6	5,622,105	6,378,545	13.5	5,626,567	6,448,151	14.6
FL	2000	150	6,886,464	8,285,121	20.3	6,872,585	7,694,781	12.0	6,859,873	7,654,469	11.6	6,871,047	8,222,193	19.7
FL	2000	200	8,174,832	10,023,365	22.6	8,158,265	10,265,772	25.8	8,145,807	9,388,546	15.3	8,196,587	9,618,411	17.3
FL	2500	50	3,231,866	3,455,578	6.9	3,232,141	3,467,366	7.3	3,223,334	3,492,685	8.4	3,220,149	3,507,461	8.9
FL	2500	100	5,148,246	6,152,954	19.5	5,152,636	5,787,818	12.3	5,151,343	6,021,383	16.9	5,147,431	6,197,248	20.4
FL	2500	150	6,811,764	9,583,839	40.7	6,815,064	10,571,964	55.1	6,796,482	8,563,710	26.0	6,811,544	9,333,898	37.0
FL	2500	200	8,047,204	11,552,195	43.6	8,060,017	11,742,014	45.7	8,041,120	10,392,061	29.2	8,062,035	10,857,319	34.7
FL	3000	50	2,997,780	3,320,935	10.8	3,001,076	3,312,119	10.4	3,010,137	3,381,328	12.3	3,005,809	3,404,744	13.3
FL	3000	100	5,004,310	6,241,666	24.7	5,011,163	5,772,254	15.2	4,996,700	5,833,114	16.7	5,013,992	6,093,971	21.5
FL	3000	150	6,435,024	8,987,480	39.7	6,442,492	9,209,602	43.0	6,425,512	8,251,115	28.4	6,429,168	8,705,039	35.4
FL	3000	200	7,436,128	10,677,664	43.6	7,436,128	11,553,411	55.4	7,430,896	9,965,541	34.1	7,452,761	10,282,659	38.0
FT	2000	50	4,222,920	4,945,315	17.1	4,182,635	4,999,681	19.5	4,384,211	5,041,227	15.0	4,232,123	5,007,903	18.3
FT	2000	100	6,364,644	7,287,880	14.5	6,314,951	7,136,836	13.0	6,473,275	7,392,286	14.2	6,403,288	7,401,913	15.6
FT	2000	150	7,246,703	8,672,449	19.7	7,254,350	8,041,037	10.8	7,241,867	8,253,114	14.0	7,250,387	8,332,732	14.9
FT	2000	200	8,839,424	11,442,296	29.4	8,782,914	10,543,400	20.0	8,868,260	10,987,033	23.9	8,845,481	11,506,360	30.1
FT	2500	50	3,837,491	4,502,991	17.3	3,732,511	4,321,197	15.8	3,963,696	4,389,942	10.8	3,832,059	4,473,727	16.7
FT	2500	100	5,274,399	6,451,116	22.3	5,269,646	6,274,791	19.1	5,349,461	6,428,095	20.2	5,265,079	6,517,727	23.8
FT	2500	150	6,123,942	7,608,778	24.2	6,108,649	7,098,790	16.2	6,097,203	7,463,751	22.4	6,096,658	7,616,737	24.9
FT	2500	200	8,600,084	12,032,343	39.9	8,500,919	12,036,332	41.6	8,676,036	11,361,556	31.0	8,654,780	11,798,102	36.3
FT	3000	50	3,503,452	4,040,057	15.3	3,459,250	4,135,520	19.5	3,574,271	4,016,542	12.4	3,492,859	4,115,452	17.8
FT	3000	100	5,405,961	6,985,021	29.2	5,383,267	6,522,965	21.2	5,479,865	6,665,566	21.6	5,402,634	6,798,673	25.8
FT	3000	150	6,261,217	7,935,346	26.7	6,240,714	7,397,357	18.5	6,317,345	7,778,135	23.1	6,274,094	7,971,663	27.1
FT	3000	200	7,671,516	10,462,376	36.4	7,654,101	10,580,099	38.2	7,664,438	10,323,060	34.7	7,672,224	10,512,550	37.0

るためであると考えらえる．

一方，*CND* は *TND* のアークフローの 0-1条件と木条件を緩和した緩和問題であり，*TND* の実行可能解は *CND* の実行可能解である．モデルの困難性の観点からは，*SND* の方が *CND* よりも困難であると考えられる．しかしながら，*TND* では木制約により実行可能領域が限定されるため，*TND* の方が *CND* よりも良い実行可能解を算出できていると考えることができる．

今回の数値実験からは，大規模インスタンスの場合，0−1変数の数や制約式の数に平均誤差が必ずしも依存しないことが明らかになった．

本研究は科学研究費基盤研究 C（課題番号23K04273）による成果の一部である．

参考文献

A. Erera, M. Hewitt, M. Savelsbergh, Y. Zhang. 2013. Improved load plan design through integer programming based local search. *Transportation Science* **47**(3) 295-454.

A. I. Jarrah, E. Johnson, L. C. Neubert. 2009. Large-scale, less-than-truckload service network design. *Operations Research* **57**(3) 609-625.

B. Gendron, S. Hanif, R.Todosijević. 2016. An efficient matheuristic for the multicommodity fixed-charge network design problem. *IFAC-PapersOnLine* **49**(12) 117-120.

B. Hoppe, E. Z. Klampfl, C. McZeal, J. Rich. 1999. Strategic load-planning for less-than-truckload trucking. Tech. Rep. CRPC-TR99812-S, Center for Research on Parallel Computation, Rice University.

B. Thiongane, J. Cordeau, B. Gendron. 2015. Formulations for the nonbifurcated hop-constrained multicommodity capacitated fixed-charge network design problem. *Computers & Operations Research* **53** 1-8.

C. L. Rocca, J. Cordeau, E. Frejinger. 2024. Combining supervised learning and local search for the multicommodity capacitated fixed-charge network design problem. *submitted to Transportation Research Part E.*

D. M. Vu, T. G. Crainic, M. Toulous. 2013. A three-stage matheuristic for the capacitated multicommodity fixed-cost network design with design-balance constraints. *Journal of Heuristics* **19** 757-795.

F. Sarayloo, T. G. Crainic, W. Rei. 2023. An integrated learning and progressive hedging matheuristic for stochastic network design problem. *Journal of Heuristics* **29**(4) 409-434.

I. Ghamlouche, T. G. Crainic, M. Gendreau. 2003. Cycle-based neighbourhoods for fixed-charge capacitated multicommodity network design. *Operations Research* **51** 655-667.

I. Mejri, S. B. Layeb, F. Zeghal. 2023. A survey on network design problems: main variants and resolution approaches. *European Journal of Industrial Engineering* **17**(2) 253-309.

J. M. Farvolden, W. B. Powell. 1994. Subgradient methods for the service network design problem. *Transportation Science* **28**(3) 256-272.

L. Munguía, S. Ahmed, D. A. Bader, G. L. Nemhauser, V. Goel, Y. Shao. 2017. A parallel local search frame work for the fixed-charge multicommodity network flow problem. *Computers & Operations Research* **77** 44-57.

M. B. Pedersen, T. G. Crainic, O. B. G. Madsen. 2009. Models and tabu search metaheuristics for service network design with asset-balance requirements. *Transportation Science* **43** 158-177.

M. Chouman, T. G. Crainic. 2011. MIP-based tabu search for service network design with design-balanced requirements. Tech. Rep. CIRRELT-2011-68, Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation, Université de Montréal.

M. Hewitt. 2010. GT instances. https://www.researchgate.net/publication/304825234.

M. Hewitt, G. L. Nemhauser, M. W. P. Savelsbergh. 2010. Combining exact and heuristics approaches for the capacitated fixed charge network flow problem. *INFORMS Journal on Computing* **22**(2) 314-325.

M. Hewitt, G. L. Nemhauser, M. W. P. Savelsbergh. 2013. Branch-and-price guided search for integer programs with an application to the multicommodity fixed charge network flow problem. *INFORMS Journal on Computing* **25**(2) 302-316.

M. Hewitt, T. G. Crainic, M. Nowak, W. Rei. 2019. Scheduled service network design with resource acquisition and management under uncertainty. *Transportation Research Part B* **128** 324-343.

M. Minoux. 1989. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks* **19**(3) 313-360.

M. Yaghini, M. R. A Kazemzadeh. 2012. A simulated annealing algorithm for unsplittable capacitated network design. *International Journal of Industrial Engineering & Production Research* **23**(2) 91-100.

M. Yaghini, M. Karimi, M. Rahbar, M. H. Sharifitabaro. 2016. A cutting-plane neighborhood structure for fixed- charge capacitated multicommodity network design problem. *INFORMS Journal on Computing* **27**(1) 45-58.

N. Katayama. 2015. A combined capacity scaling and local branching approach for capacitated multi-commodity network design problem. *Far East Journal of Applied Mathematics* **92**(1) 1-30.

N. Katayama. 2016. A combined capacity scaling and local branching matheuristic for the hop-constrained multicommodity network design problem. *Far East Journal of Applied Mathematics* **94** (3) 185-215.

N. Katayama. 2020. MIP neighborhood search heuristics for a capacitated fixed-charge network design problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* **37**(3).

N. Katayama, M. Z. Chen, M .Kubo. 2009. A capacity scaling procedure for the multi-commodity capacitated network design problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **232**(2) 90-101.

R. Bai, J. R. Woodward, N. Subramanian, J. Cartlidge. 2018. Optimisation of transportation service networkusing k-node large neighbourhood search. *Computers & Operations Research* **89** 193-205.

R. Rahmaniani, T. G. Crainic, M. Gendreau, W. Rei. 2018. Accelerating the benders decomposition method: Application to stochastic network design problems. *SIAM Journal on Optimization* **28**(1) 875-903.

R. T. Wong. 1984. Introduction and recent advances in network design: Models and algorithms. M. Florian, ed., *Transportation Planning Models*. Elsevier Science, North Holland, Amsterdam, 187-225.

T. G. Crainic, M. Gendreau, B. Gendron, eds. 2021a. *Network Design with Applications to Transportation and Logistics*. Springer, Cham, Switzerland.

T. G. Crainic, M. Hewitt, F. Maggioni, W. Rei. 2021b. Partial benders decomposition: general methodology and application to stochastic network design. *Transportation Science* **55**(2) 414-435.

T. G. Crainic, M. Hewitt, M. Toulouse, D. M. Vu. 2018. Scheduled service network design with resource acquisition and management. *EURO Journal on Transportation and Logistics* **7** 277-309.

T. G. Crainic, Y. Li, M. Toulouse. 2006. A first multilevel cooperative algorithm for capacitated multicommodity network design. *Computers & Operations Research* **33** 2602-2622.

T. L. Magnanti, R. T. Wong. 1984. Network design and transportation planning: Models and algorithms. *Transportation Science* **18**(1) 1-55.

X. Li, K. Wei, Z. Guoc, W. Wang, Y. P. Aneja. 2021. An exact approach for the service network design problem with heterogeneous resource constraints. *Omega* **102** 102376.

片山直登．2016．フロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題のための木生成法．流通経済大学流通情報学部紀要 **21**(1) 1-17.

片山直登．2018．非分割フローを考慮した容量制約をもつネットワーク設計の MIP 近傍探索法．流通経済大学流通情報学部紀要 **22**(2) 17-31.