時間制約を考慮した施設配置・ネットワーク設計問題

Facility location and network design problems with time constraints

片山　直登　流通経済大学　流通情報学部

1　はじめに

施設配置・ネットワーク設計問題は，ノードおよびアークに配置する資源の集合が与えられたときに，様々な費用が最小になるようなノードおよびアーク上の資源の配置を求める問題である．本研究では，多品種の需要と各品種の始点・終点間の移動時間に制限がある施設配置・ネットワーク設計問題を対象とする．

アーク上の資源の配置問題は，ネットワーク設計問題として知られており，多くの研究が行われている (Crainic et al. 2021). 一方，ノード上の資源の配置問題は施設配置問題 (Laporte et al. 2015) として知られている．ハブノードを求める問題はハブ配置問題 (Campbell and O'Kelly 2012) として知られており，ハブ配置問題においてアーク上の資源配置も考慮する問題はハブアーク配置問題 (Campbell et al. 2005a,b, Alumur et al. 2021) とよばれ，ハブ配置問題とネットワーク設計問題を融合した問題となる．

施設配置問題において，Bienstock and Saniee (2001) は，ATM ネットワーク設計を対象としたモデルにおいてアーク費用とノード費用を考慮している．Kröller and Wessäly (2003) は，アークとノード上の資源に離散的費用をもつモデルに対して，割当てによる定式化を提案し，ベンダース分解法を適用している．Rodríguez-Martín and Salazar-González (2006) は，アークとハブに容量と費用をもつモデルに対して，線形緩和を用いた反復局所探索法を提案している．Belotti et al. (2007) はノード上の資源の費用が容量に対してステップ関数であるモデルに対する妥当不等式を提案し，分枝カット法を適用している．競争を考慮したモデルに対して Gelareh et al. (2010) はラグランジュ緩和法とプライマルヒューリスティクスを示し，Sasaki et al. (2014) はトラフィックを配分する最適解法を提案している．また，フロー費用モデルに対して，Camargo et al. (2017) はベンダース分解法を提案し，Tanash et al. (2017) はラグランジュ緩和法を適用している．時間制限やハブでの需要分割などの条件を考量したモデルに対して，Rothenbcher et al. (2016) は分

枝価格カット法を適用している．予算制約のある多期間モデルに対して，Gelareh et al. (2015) はメタヒューリスティクスとベンダース分解法を開発している．

ハブアーク配置問題において，様々なハブ間のネットワークの形状を対象としたモデルが開発されている．ツリー・スター型ハブネットワークに対して，Contreras et al. (2009) はラグランジュ緩和法を開発し，Contreras et al. (2010) は妥当不等式を提案し，Martins et al. (2013) は Benders 分解法による最適解法を示している．スター・スター型ネットワークに対して，Labbé and Yaman (2008) はファセットおよびラグランジュヒューリスティクスを示し， Yaman (2008) はラグランジュ緩和と局所探索法を提案している．また，Martins et al. (2015a) はベンダース分枝カット法や適応探索法などのヒューリスティクスを開発し，Martins et al. (2015b) はマルチカットや最適カットを組み合わせたベンダース分枝カット法を提案している．サイクル・スター型ネットワークに対して，Contreras et al. (2017) は混合ダイカット不等式を用いた分枝カット法を提案している．階層構造をもつモデルに対して，Thomadsen and Larsen (2007) は列生成法を用いた分枝価格法による最適解法を開発している．Catanzaro et al. (2011) はグラフ分割を含む問題に対する妥当不等式を提案している．ルーティングを含む問題に対して，Camargo et al. (2013) はベンダース分解法を開発し，Rodríguez-Martín et al. (2014) は分枝カット法を提案している．Real et al. (2021) はマルチモーダルを考慮したルーティングを含む問題に対して，適応型近傍探索法を提案している．

一方，ネットワークの構成が与えられたもとで，移動時間を制約条件としたフローを求めるモデルは，コンテナの海上輸送である定期船輸送の分野で数多くの研究が行われている．Karsten et al. (2017) は移動時間の制限を考慮したモデルに対して，大規模近傍探索を反復する改善ヒューリスティクスを開発している．Balakrishnan and Karsten (2017) は，積替回数制限を考慮したモデルを扱い，妥当不等式と最適化ベースのヒューリスティクスを開発している．Tierney et al. (2019) は，定時性を考慮した確率モデルを示し，シミュレーションを用いた解析を行っている．Koza et al. (2020) は，時間制限などのサービスレベルを考慮したモデルを扱い，列生成によるメタヒューリスティクスを提案している．また，Trivella et al. (2021) は，移動時間制限をソフト制約としてモデル化し，列生成法を適用した解法を示している．

移動時間の制限を取り扱ったネットワーク設計モデルは少なく，Hellsten et al. (2021) は単一の時間制限を考慮したモデルに対して，いくつかの定式化を示し，列生成法と分枝価格法を用いた解法を示している．

本研究では，ノード上の資源配置を求める施設配置とアーク上の資源配置とフローを求めるネットワーク設計を同時に考慮する問題を対象とし，アークおよびノードに配置される資源数が整数値をとるモデルと資源の費用が容量に対して区分的線形関数となるモデルにおいて，複数の移動時間基準に対するカバー率を考慮したモデルを扱う．アークフローを用いた定式化とパスフローを用いた定式化

を示し，パスフローを用いた定式化に対する列生成法を示す．また，ベンチマーク問題のデータを用いて，アークフローを用いた定式化について数値実験を行い，問題の困難性を明らかにする．

2　モデルの前提条件

はじめに，本研究における前提条件を列挙する．

- ノード集合が与えられる．
- 向きをもつアーク集合が与えられる．
- アークおよびノードには離散容量をもつ資源を配置できる．
- アークおよびノードに配置される資源に対する費用が与えられる．
- 品種集合が与えられる．
- 品種ごとの需要量が与えられ，各品種は異なる始点・終点をもつ．
- アークおよびノード上を流れるフローに対して，品種ごとの単位当たりのフロー費用が与えられる．
- アークおよびノード上を流れるフローに対して，品種ごとの移動時間が与えられる．
- 同一品種の需要は，単一の経路上を移動する．
- 複数の時間制限が与えられ，それぞれの時間制限に対してカバー率が与えられる．

カバー率は，各時間制限を満たす需要の比率である．時間制限は，例えば，全需要の 10%までが決められた制限時間以内で移動し，全需要の 50%までが別の決められた制限時間以内で移動するといった制限である．

3　整数モデルの定式化

はじめに，アークおよびノードに配置される資源数が整数値を取り，資源の費用と容量が資源数に比例するモデルを扱う．このモデルに対するアークフロー変数を用いた定式化を示す．

向きのあるアーク集合を A，ノード集合を N，品種集合を K とする．ノード n を始点とするアークの終点であるノード集合を N_n^+，ノード n を終点とするアークの始点であるノード集合を N_n^- とする．時間制限の集合を H とする．また，自然数の集合を Z とする．

品種 k は始点，終点をもち，需要量 q^k が与えられる．品種の需要はいくつかのアークとノードを経由して，品種の始点から終点に流れるものとし，取りうる経路数は 1 本とする．アーク (i,j) には，品種 k に対するアーク上の単位当たりのフ

ロー費用 c_{ij}^k，アーク上の移動時間 t_{ij}^k が与えられ，アークに配置される資源に対する単位当たりの費用 f_{ij}，単位当たりの容量 b_{ij} が与えられる．ノード n には，品種 k に対するノード上の単位当たりのフロー費用 a_n^k，ノード上の移動時間 t_n^k が与えられ，ノードに配置される資源に対する単位当たりの費用 g_n，単位当たりの容量 m_n が与えられる．ノード n が品種 k の始点であれば -1, 終点であれば 1, それ以外であれば 0 である定数を α_n^k とし，ノード n が品種 k の始点または終点であれば 1, それ以外であれば 0 である定数を β_n^k とする．時間制限集合 H を $H = \{1, \cdots, h_{max}\}$ とする．なお，h 番目の時間制限を l_h としたとき，$l_{h-1} < l_h (h = 2, \cdots, h_{max})$ を満たす．h 番目の時間制限を満たす需要の全需要に対する需要カバー率を d_h とする．ただし，$d_{h-1} < d_h (h = 2, \cdots, h_{max})$ とする．

アーク (i, j) に対して，品種 k のフローが流れるとき 1，そうでないとき 0 であるアークフロー変数を x_{ij}^k，アークに配置される資源数を表す整数変数であるアーク資源数変数を y_{ij} とする．また，ノード n に対して，品種 k のフローがノード上を流れるとき 1，そうでないとき 0 であるノードフロー変数を u_n^k，ノードに配置される資源数を表す整数変数であるノード資源数変数を z_n とする．また，品種 k の需要が h 番目の時間制限を満たすとき 1，そうでないとき 0 である時間制限変数を v_h^k とする．

このとき，整数資源変数・アークフローモデル IAF は次のようになる．

IAF：

$$minimize \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{n\in N} \sum_{k\in K} q^k a_n^k u_n^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} + \sum_{n\in N} g_n z_n \tag{1}$$

$subject\ to$

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = \alpha_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^k + \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^k = 2\ u_n^k + \beta_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \tag{3}$$

$$\sum_{k\in K} q^k x_{ij}^k \le b_{ij} y_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, \tag{4}$$

$$x_{ij}^k \le y_{ij} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \tag{5}$$

$$\sum_{k\in K} q^k u_n^k \le m_n z_n \quad \forall n \in N, \tag{6}$$

$$u_n^k \le z_n \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{7}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{n\in N} t_n^k u_n^k \le l_{max} - (l_{max} - l_h) v_h^k \quad \forall h \in H, k \in K, \tag{8}$$

$$\sum_{k\in K} q^k v_h^k \ge d_h \sum_{k\in K} q^k \quad \forall h \in H, \tag{9}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \tag{10}$$

$$u_n^k \in \{0,1\} \quad \forall n \in N, k \in K, \tag{11}$$

$$v_h^k \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, k \in K, \tag{12}$$

$$y_{ij} \in Z \quad \forall (i,j) \in A, \tag{13}$$

$$z_n \in Z \quad \forall n \in N. \tag{14}$$

(1) 式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフロー費用の合計，第二項はノード上のフロー費用の合計，第三項はアーク上の資源費用の合計，第四項はノード上の資源費用の合計である．(2) 式はフロー保存式であり，始点を発した需要のフローがいくつかのアークを経由して終点に達することを表す．x が 0-1 変数であることから，特定の品種が流れるパスは 1 本に限定される．(3) 式はノード上のフロー保存式である．当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを流れるとき，左辺は 2，β_n^k は 0，ノードフローは 1 となる．当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを流れないとき，左辺は 0，β_n^k は 0，ノードフローは 0 となる．また，当該ノードを始点または終点とする品種の場合，左辺は 1，β_n^k は 1，ノードフローは 0 となる．このように，当該ノードを始点または終点としない品種が当該ノードを流れるときにのみ，ノードフローは 1 となり，それ以外は 0 となる．(4) 式はアーク容量の制約式であり，アーク上に資源が配置されるときにアーク上のフローの合計は資源の容量以下であることを表す．(5) 式は強制制約式であり，アーク上に資源が配置されるときに限り，フローが流れることができることを表す．左辺は 0 または 1 をとり，右辺は整数値をとることになり，弱い制約式となる．(6) 式はノード容量の制約式であり，ノード上に資源が配置されるときにノード上のフローの合計は資源の容量以下であることを表す．(7) 式は強制制約式であり，ノード上に資源が配置されるときに限り，フローが流れることができることを表す．左辺は 0 または 1 をとり，右辺は整数値をとることになり，弱い制約式となる．(8) 式は時間制限に関する式である．左辺は品種 k の始点・終点間の移動時間を表す．右辺は，v_h^k が 1 のときに l_h となり h 番目の時間制限を満足し，v_h^k が 0 のときに l_{max} となり最大の時間制限を満足することを表す．(9) 式は時間制限を満足する需要の全需要に対するカバー率の条件を表す式である．左辺は移動時間が h 番目の時間制限を満たす需要の合計であり，右辺は満たさなければならない需要量である．(10) 式から (12) 式は変数の 0-1 条件，(13) 式と (14) 式は変数の離散条件である．

4 区分的線形モデルの定式化

アークおよびノード上の費用が容量に対して区分的線形であるモデルに対して，アークフロー変数を用いた定式化とパスフロー変数を用いた定式化を示す．

これらは，配置される資源の費用が容量に対してステップ関数として表されるモデルである．線形であるフロー費用とあわせると，費用が区分的線形関数として表されるモデルとなる．

4.1　アークフローモデル

はじめに，アークフロー変数を用いたモデルを示す．アーク (i,j) 上に配置できる資源の集合を $S_{ij} = \{1,\cdots,s_{max}\}$，ノード n 上に配置できる資源の集合を $W_n = \{1,\cdots,w_{max}\}$ とする．アーク (i,j) 上に配置される資源 s に対して，費用 f^s_{ij} と容量 b^s_{ij} が与えられる．ここで，$b^{s-1}_{ij} < b^s_{ij}(s = 2,\cdots,s_{max})$ とする．ノード n 上に配置される資源 w に対して，費用 g^w_n と容量 m^w_n が与えられる．ここで，$m^{w-1}_n < m^w_n(w = 2,\cdots,w_{max})$ とする．アーク (i,j) 上に配置される資源 s に対して，品種 k のフローがアーク上の資源 s を流れるとき 1，そうでないとき 0 であるアーク資源フロー変数を o^{ks}_{ij} とし，資源 s が配置されるとき 1，そうでないとき 0 となる 0-1 変数であるアーク資源変数を y^s_{ij} とする．なお，アークには高々 1 つの資源を配置することができる．ノード n に対して，品種 k のフローがノード上を流れるとき 1，そうでないとき 0 であるノードフロー変数を u^k_n，ノード上の資源 w を流れるとき 1，そうでないとき 0 であるノード資源フロー変数を r^{kw}_n とし，資源 w が配置されるとき 1，そうでないとき 0 であるノード資源変数を z^w_n とする．なお，ノードには高々 1 つの資源を配置することができる．これら以外の係数，定数および変数は IAF と同様である．

このとき，区分的線形・アークフローモデル PAF は次のようになる．

PAF：

$$\textit{minimize} \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} q^k c^k_{ij} x^k_{ij} + \sum_{n\in N}\sum_{k\in K} q^k a^k_n u^k_n + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}} f^s_{ij} y^s_{ij} + \sum_{n\in N}\sum_{w\in W_n} g^w_n z^w_n \tag{15}$$

subject to

$$\sum_{i\in N^+_n} x^k_{in} - \sum_{j\in N^-_n} x^k_{nj} = \alpha^k_n \quad \forall n\in N, k\in K, \tag{16}$$

$$\sum_{i\in N^+_n} x^k_{in} + \sum_{j\in N^-_n} x^k_{nj} = 2\ u^k_n + \beta^k_n \quad \forall n\in N, k\in K, \tag{17}$$

$$x^k_{ij} = \sum_{s\in S_{ij}} o^{ks}_{ij} \quad \forall k\in K, (i,j)\in A, \tag{18}$$

$$\sum_{k\in K} q^k o^{ks}_{ij} \geq b^{s-1}_{ij} y^s_{ij} \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A, \tag{19}$$

$$\sum_{k\in K} q^k o^{ks}_{ij} \leq b^s_{ij} y^s_{ij} \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A, \tag{20}$$

$$o_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^{s} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{21}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^{s} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A, \tag{22}$$

$$u_n^k = \sum_{w \in W_n} r_n^{kw} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{23}$$

$$\sum_{k \in K} q^k r_n^{kw} \geq m_n^{w-1} z_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{24}$$

$$\sum_{k \in K} q^k r_n^{kw} \leq m_n^{w} z_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{25}$$

$$r_n^{kw} \leq z_n^w \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{26}$$

$$\sum_{w \in W_n} z_n^w \leq 1 \quad \forall n \in N, \tag{27}$$

$$\sum_{(i,j) \in A} t_{ij} x_{ij}^k + \sum_{n \in N} t_n u_n^k \leq l_{max} - (l_{max} - l_h) v_h^k \quad \forall h \in H, k \in K, \tag{28}$$

$$\sum_{k \in K} q^k v_h^k \geq d_h \sum_{k \in K} q^k \quad \forall h \in H, \tag{29}$$

$$o_{ij}^{ks} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{30}$$

$$r_n^{kw} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{31}$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A, \tag{32}$$

$$u_n^k \in \{0,1\} \quad \forall n \in N, k \in K, \tag{33}$$

$$y_{ij}^s \in \{0,1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{34}$$

$$z_n^w \in \{0,1\} \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{35}$$

$$v_h^k \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, k \in K. \tag{36}$$

(15) 式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第一項はアーク上のフロー費用の合計，第二項はノード上のフロー費用の合計，第三項はアーク上の資源の費用の合計，第四項はノード上の資源の費用の合計である．y_{ij}^s は 0-1 値をとるアーク資源変数であり，アーク上の費用は資源の容量に対するステップ関数となる．z_n^w は 0-1 値をとるノード資源数変数であり，ノード上の費用は資源の容量に対するステップ関数となる．(18) 式は資源 s 上のアークフローの合計が全体のアークフローになることを表し，アークフローを各資源のフローに分割している．(19) 式は アーク容量の下限の制約式であり，資源 s を使用するときにフローの合計は資源 $s-1$ のアーク容量以上であることを表す．(20) 式はアーク容量の上限の制約式であり，資源 s を使用するときにアークフローの合計は資源 s のアーク容量以下であることを表す．(21) 式は強制制約式であり，アーク上に資源 s が配置されるときに限り，資源 s にフローが流れることを表す．左辺は 0 また

は1をとり，右辺も0または1をとることになり，強い制約式となる．(22) 式は，アークに配置される資源が高々1であることを表す．(23) 式は資源 w 上のノードフローの合計が全体のノードフローになることを表し，ノードフローを各資源のフローに分割している．(24) 式は ノード容量の下限の制約式であり，資源 w を使用するときにノードフローの合計は資源 $w-1$ の ノード容量以上であることを表す．(25) 式は ノード容量の上限の制約式であり，資源 w を使用するときにノードフローの合計は資源 w のノード容量以下であることを表す．(26) 式は強制制約式であり，ノード上に資源 w が配置されるときに限り，資源 w を流れることができることを表す．左辺は0または1をとり，右辺も0または1をとることになり，強い制約式となる．(27) 式は，ノードに配置される資源が高々1であることを表す．(30) 式から (36) 式は変数の 0-1 条件である．

PAF の内，アークに関する定式化は区分的線形費用をもつネットワーク設計問題で用いられている定式化 (Croxton et al. 2003) である．アークやノードに配置できる資源数に上限がない場合は，資源数の上限は需要の合計値に依存するため，需要の合計が大きくなると定式化に含まれる 0-1 変数の数は膨大なものとなる．また，費用が区分的線形関数となるため，一般的には PAF は IAF よりも相対的に難しい問題となる．

4.2 パスフローモデル

パスフロー変数を用いたモデルを示す．品種 k の取りうるパスの集合を P^k とし，品種 k のパス p を使用するとき1，そうでないとき0であるパスフロー変数を e_p^k とする．また，パス p がアーク (i,j) を含むとき1，そうでないとき0である定数を δ_{ij}^p，パス p がノード n を含むとき1，そうでないとき0である定数を ϵ_n^p とする．

このとき，パスフローモデル PPF は次のようになる．

PPF：

$$minimize \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} q^k c_{ij}^k \delta_{ij}^p e_p^k + \sum_{n\in N}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P^k} q^k a_n^k \epsilon_n^p e_p^k + \sum_{(i,j)\in A}\sum_{s\in S_{ij}} f_{ij}^s y_{ij}^s + \sum_{n\in N}\sum_{w\in W_n} g_n^w z_n^w \tag{37}$$

$subject\ to$

$$(\lambda^k) \qquad \sum_{p\in P^k} e_p^k = 1 \quad \forall k\in K, \tag{38}$$

$$(\mu_{ij}^k) \qquad \sum_{p\in P^k} \delta_{ij}^p e_p^k = \sum_{s\in S_{ij}} o_{ij}^{ks} \quad \forall k\in K, (i,j)\in A, \tag{39}$$

$$(\nu_{ij}^s) \qquad \sum_{k\in K} q^k o_{ij}^{ks} \geq b_{ij}^{s-1} y_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A, \tag{40}$$

$$(\xi_{ij}^s) \qquad \sum_{k\in K} q^k o_{ij}^{ks} \leq b_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s\in S_{ij}, (i,j)\in A, \tag{41}$$

$$(\pi_{ij}^{ks}) \qquad o_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^{s} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{42}$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^{s} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A, \tag{43}$$

$$(\rho_n^k) \qquad \sum_{p \in P^k} \epsilon_n^p e_p^k = \sum_{w \in W} r_n^{kw} \quad \forall k \in K, n \in N, \tag{44}$$

$$(\sigma_n^w) \qquad \sum_{k \in K} q^k r_n^{kw} \geq m_n^{w-1} z_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{45}$$

$$(\tau_n^w) \qquad \sum_{k \in K} q^k r_n^{kw} \leq m_n^{w} z_n^w \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{46}$$

$$(\upsilon_n^{wk}) \qquad r_n^{kw} \leq z_n^w \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{47}$$

$$\sum_{w \in W_n} z_n^w \leq 1 \quad \forall n \in N, \tag{48}$$

$$\sum_{p \in P^k} t^p e_p^k \leq l_{max} - (l_{max} - l_h) v_h^k \quad \forall h \in H, k \in K, \tag{49}$$

$$\sum_{k \in K} q^k v_h^k \geq d_h \sum_{k \in K} q^k \quad \forall h \in H, \tag{50}$$

$$e_p^k \in \{0,1\} \quad \forall p \in P^k, k \in K, \tag{51}$$

$$o_{ij}^{ks} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{52}$$

$$r_n^{kw} \in \{0,1\} \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N, \tag{53}$$

$$y_{ij}^{s} \in \{0,1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{54}$$

$$z_n^w \in \{0,1\} \quad \forall w \in W_n, n \in N, \tag{55}$$

$$v_h^k \in \{0,1\} \quad \forall h \in H, k \in K. \tag{56}$$

(37) 式は総費用を表す目的関数であり，これを最小化する．第三項はアーク上の資源の費用の合計，第四項はノード上の資源の費用の合計である．(38) 式はフローの保存式であり，パスフロー変数が 0-1 変数であることから，品種 k の取りうるパス集合 P^k から 1 本のパスを選択することを表す．(39) 式は資源 s 上のアークフローの合計が全体のアークフローになることを表し，アークフローを各資源のフローに分割している．(44) 式は資源 w 上のノードフローの合計が全体のノードフローになることを表し，ノードフローを各資源のフローに分割している．(51) 式は変数の 0-1 条件である．なお，(38) 式から (47) 式の右端の変数 λ^k から υ_n^{wk} はそれぞれの制約式に対する双対変数である．

なお，IAF に対するパスフローによる定式化も可能であるが，ここでは省略する．

4.3 パスフローモデルにおける列生成法

PPF において 0-1 変数を連続緩和した問題を $PPFL$ とし，$PPFL$ を解くことを考える．$PPFL$ ではパスフロー変数は指数オーダー個存在するために，陽的に列挙することは困難である．このため，必要なパスフロー変数である列を生成する列生成法を使用する．なお，列生成法は線形緩和問題を最適に解くための手法であり，最適解または近似解を求めるためには，別の手法を組み合わせる必要がある．

列生成法は，適当な列であるパス集合からはじめ，適時，基底に入る被約費用が負であるパスフロー変数を生成していく．e_p^k に対する被約費用を ϕ_p^k，o_{ij}^{ks} に対する被約費用を χ_{ij}^{ks}，r_n^{kw} に対する被約費用を ψ_n^{kw} とすると，これらの被約費用は次のようになる．

$$\phi_p^k = \sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p \left(q^k c_{ij}^k + \mu_{ij}^k\right) + \sum_{n\in N} \epsilon_n^p \left(q^k a_n^k + \rho_n^k\right) - \lambda^k \quad \forall p \in P^k, k \in K, \tag{57}$$

$$\chi_{ij}^{ks} = -\mu_{ij}^k + q^k \nu_{ij}^s - q^k \xi_{ij}^s + \pi_{ij}^{ws} \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \tag{58}$$

$$\psi_n^{kw} = -\rho_n^k + q^k \tau_n^w - q^k \sigma_n^w + \upsilon_n^{wk} \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N. \tag{59}$$

ここで，e_p^k と o_{ij}^{ks} には (39) 式の関係がある．列生成法では，被約費用が負であるパスフロー変数 e_p^k を生成する．同時に，e_p^k に対応する (39) 式が生成されていない場合は (39) 式を生成し，これに含まれる o_{ij}^{ks} も生成する．非基底であった変数 e_p^k が非基底から基底に入り正の値をとると，(39) 式の左辺の値も正となるためにいずれかの o_{ij}^{ks} が非基底から基底に入ることになる．μ_{ij}^k に対応する (39) 式が生成されていない，すなわち (39) 式に含まれる e_p^k が生成されていない場合は，μ_{ij}^k の値が定義されていない．そこで，このような場合を考える．このとき，(39) 式の両辺の変数値が 0 で等号が成り立つと考え，μ_{ij}^k に非負の値を設定する．ここで，(57) 式と (58) 式から分かるように，μ_{ij}^k は被約費用 ϕ_p^k および χ_{ij}^{ks} の両方に含まれている．

(57) 式の右辺の第一項は，最短経路問題におけるアーク上の移動時間に相当する．このため，ϕ_p^k が負であるパスフロー変数を探すためには，μ_{ij}^k が小さい方が望ましい．そこで，$o_{ij}^{ks} (s \in S_{ij})$ が非基底変数である範囲内で，値が最小となるように μ_{ij}^k の値を設定する．すなわち，アーク (i,j)，品種 k において，被約費用 χ_{ij}^{ks} が非負となるように，まだ生成されていない μ_{ij}^k の値を設定する．

現在，(58) 式において χ_{ij}^{ks} は非負であることから，次式が成り立つ．

$$q^k \nu_{ij}^s - q^k \xi_{ij}^s + \pi_{ij}^{ws} \geq \mu_{ij}^k \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A. \tag{60}$$

したがって，すべての (60) 式を満足する最小の μ_{ij}^k は資源 $s(\in S_{ij})$ の中で (60) 式の左辺の最小値となることから，μ_{ij}^k を次の値 $\bar{\mu}_{ij}^k$ とする．

$$\bar{\mu}_{ij}^k = \min \left(q^k \nu_{ij}^s - q^k \xi_{ij}^s + \pi_{ij}^{ws}\right) \quad \forall k \in K, (i,j) \in A. \tag{61}$$

ψ_n^{kw} に対しても同様であるので，次式が成り立つ，

$$q^k\tau_n^w - q^k\sigma_n^w + \upsilon_n^{wk} \geq \rho_n^k \quad \forall k \in K, w \in W_n, n \in N. \tag{62}$$

すべての (62) 式を満足する最小の ρ_n^k は資源 $w(\in W_n)$ の中で (62) 式の左辺の最小値となることから，ρ_n^k を次の値 $\bar{\rho}_n^k$ とする．

$$\bar{\rho}_n^k = \min\left(q^k\tau_n^w - q^k\sigma_n^w + \upsilon_n^{wk}\right) \quad \forall k \in K, n \in N. \tag{63}$$

ここで，(39) 式が生成されている場合は μ_{ij}^k，生成されていない場合は $\bar{\mu}_{ij}^k$ となる変数を $\hat{\mu}_{ij}^k$ とする．また，(44) 式が生成されている場合は ρ_n^k，生成されていない場合は $\bar{\rho}_n^k$ となる変数を $\hat{\rho}_{ij}^k$ とする．

$\hat{\mu}$，$\hat{\rho}$，λ および σ が与えられたときに，ϕ_p^k の値が負となるパスフロー変数を見つけることは，アーク上の移動時間を (57) 式の第一項，ノード上の移動時間を第二項としたネットワーク上で，始点と終点間のパスの移動時間が λ^k 未満であるパスを求めることに相当する．始点と終点間のパスの中で移動時間が最小のパスを見つけたとき，その移動時間が λ^k 以上であれば被約費用が負であるパスが存在しないことになり，λ^k 未満であれば新たなパスが見つかったことになる．

そのため，品種 k ごとの価格付け問題である次のような品種の始点・終点間の最短の移動時間を求める最短経路問題 SP^k を解き，目的関数値が負となるパスフロー変数を求めればよい．なお，ノードをダミーのアークに置き換えることにより，アークに重みをもつ最短経路問題に置き換えることができる．

SP^k:

$$minimize \quad \sum_{(i,j)\in A} \delta_{ij}^p \left(q^k c_{ij}^k + \bar{\mu}_{ij}^k\right) + \sum_{n\in N} \epsilon_n^p \left(q^k a_n^k + \bar{\rho}_n^k\right) - \lambda^k \tag{64}$$

$$subject\ to$$

$$\sum_{p\in P^{od}} e_p^k = 1, \tag{65}$$

$$e_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \tag{66}$$

5 数値実験

時間制約をもつネットワーク設計問題で用いられるベンチマーク問題から作成したインスタンスを用いて，モデルによる問題の困難性を比較する．計算の対象とした定式化は，整数・アークフローモデル IAF と区分的線形・アークフローモデル PAF である．

使用したベンチマーク問題は，Hellsten et al. (2021) が用いた C 問題と R 問題である．これらは，容量制約をもつネットワーク設計問題のために Crainic et al. (2001) が提示したものに，アーク上の移動時間を追加したものである．C 問題は，c100 が 5 個と c33 から c60 の 27 個の計 32 個のインスタンスで構成される．また，R 問題

は，r04 から r18(r06 は欠) に分類され，それぞれは 9 個のインスタンスで構成される．表 1 に同一のノード数，アーク候補数および品種数のインスタンス数を示す．

数値実験で使用したソフトウエア・機器等は以下の通りである．

- OS および言語：UBUNTU 20，Python 2.7
- 最適化ソルバー：Gurobi 9.1
- CPU AMD Ryzen9 3950X 3.5GHz 16Cores，RAM 64GByte

また，数値実験で設定したパラメータは以下の通りである．

- 時間パラメータ：1.2
- 時間制限集合：0.8，1.2
- 需要カバー率：0.5，1.0
- セグメントパラメータ:5，10
- フロー費用パラメータ：0.5
- 資源費用パラメータ：ノード数
- フロー時間パラメータ：0
- 最大計算時間：10 時間

なお，時間パラメータは Hellsten et al. (2021) で使用されている時間制限を設定する倍数である．時間制限の 0.8 は，1.2 に対して 2/3 倍の時間制限となる．需要カバー率の 1.0 は時間制限 1.2 に対して全需要，0.5 は時間制限 0.8 に対して全体の 50%をカバーすることとする．

IAF における費用，時間および容量は以下のように設定した．

- アークフロー費用：フロー費用
- アーク資源費用：アーク費用
- アーク資源容量：アーク容量
- ノードフロー費用：平均アークフロー費用 × フロー費用パラメータ
- ノード資源費用：平均アーク資源費用 × 資源費用パラメータ
- ノードフロー時間：平均アークフロー時間 × フロー時間パラメータ
- ノード資源容量：全需要量/(ノード数 × セグメントパラメータ)

ここで，フロー費用，アーク費用およびアークフロー時間は，Hellsten et al. (2021) で使用されているものである．

PAF における費用，時間および容量は以下のように設定した．

- アークフロー費用：フロー費用
- アーク資源費用：アーク費用 × 資源番号
- アーク資源容量：アーク容量 ×(資源番号)^2/セグメントパラメータ
- ノードフロー費用：平均アークフロー費用 × フロー費用パラメータ
- ノード資源費用：平均アーク資源費用 × 資源番号 × 資源費用パラメータ

- ノードフロー時間：平均アークフロー時間 × フロー時間パラメータ
- ノード資源容量：全需要量 ×(資源番号)^2/(セグメントパラメータ)^2

2つのモデルをPythonとGurobiを用いて，10時間を上限とした計算時間で定式化を直接解くことにより，最適値または近似解と上界値と下界値の差である誤差を求めた．ノード，アークおよび品種数が同一であるインスタンスを一つのグループとし，グループごとに計算結果を集計した．なお，誤差は(上界値-下界値)/下界値×100で算出した．

IAFのセグメント数5の結果の集計を表2に示す．CRはC問題とR問題の区別，Nはノード数，Aはアーク数，Kは品種数である．平均誤差は実行可能解が求められたインスタンスの平均値である．また，最適解が求められない場合の計算時間は上限の10時間として，計算時間の平均値を求めた．最適解数は，計算時間の上限である10時間以内に最適解を求めることができたインスタンス数である．近似解数は，計算時間内に最適解を求めることができなかったが，実行可能な近似解を求めることができたインスタンス数である．また，未解数は，計算時間内に実行可能解を求めることができなかったインスタンス数である．IAFのセグメント数5では，158インスタンスのうち，145インスタンスの最適解，8インスタンスの近似解を求めることができたが，10時間以内で5インスタンスの実行可能解を算出することができなかった．実行可能解が得られたインスタンスの平均誤差は0.0%，最大で0.5%であり，平均計算時間は3869秒であった．なお，平均誤差には未解であるインスタンスの誤差は含まれていない．品種数100までのインスタンスに対しては最大でも平均52秒で最適解を求めることができている．一方，品種数200以上のインスタンスの計算時間は極めて長く，品種数200以上のインスタンスのうち8インスタンスの最適解を算出できず，5インスタンスで実行可能解すら算出することができていない．

IAFのセグメント数10の結果の集計を表3に示す．IAFのセグメント数10では，158インスタンスのうち，143インスタンスの最適解，11インスタンスの近似解を求めることができたが，10時間以内で4インスタンスの実行可能解を算出することができなかった．実行可能解が得られたインスタンスの平均誤差は0.1%，最大で0.6%であり，平均計算時間は4462秒であった．なお，平均誤差には未解であるインスタンスの誤差は含まれていない．セグメント数5の場合と同様に，品種数100までのインスタンスに対しては短時間で最適解を求めることができているが，品種数200以上のインスタンスの計算時間は極めて長く，品種数200以上のインスタンスのうち11インスタンスの最適解を算出できず，4インスタンスで実行可能解すら算出することができていない．セグメント数5と比較すると，計算結果に顕著な差は見られなかった．

PAFのセグメント数5の結果の集計を表4に示す．PAFのセグメント数5では，158インスタンスのうち，118インスタンスの最適解，35インスタンスの近似解を求めることができたが，10時間以内で5インスタンスの実行可能解を算出す

ることができなかった．実行可能解が得られたインスタンスの平均誤差は 1.2%，最大で 7.8%であり，平均計算時間は 10525 秒であった．なお，平均誤差には未解であるインスタンスの誤差は含まれていない．最適解が求められたインスタンスは 118 にとどまり，計算時間が 10 時間に達したインスタンスが 40 となったため，平均計算時間は 3 時間に達している．品種数 100 では 4 インスタンス，品種数 200 では 27 インスタンス，品種数 400 では 4 インスタンスの最適解を求めることができていない．なお，平均計算時間が 36000 秒であるグループは，すべてのインスタンスの計算時間が上限の 10 時間に達していることになる．IAF と PFA はモデルとパラメータが異なるために結果を直接的には比較することはできないが，PFA は IAF よりも平均誤差が大きく，平均計算時間が長くなり，難しい問題であることが分かる．

PAF のセグメント数 10 の結果の集計を表 5 に示す．PAF のセグメント数 10 では，158 インスタンスのうち，114 インスタンスの最適解，26 インスタンスの近似解を求めることができたが，10 時間以内で 18 インスタンスの実行可能解を算出することができなかった．実行可能解が得られたインスタンスの平均誤差は 1.2%，最大で 9.2%であり，平均計算時間は 12866 秒であった．なお，平均誤差には未解であるインスタンスの誤差は含まれていない．PAF のセグメント数 5 と比較すると，実行可能解を算出できなかったインスタンス数は大幅に増加している．これは，0-1 変数の数が大幅に増加するためである．品種数の多いインスタンスでは，実行可能解を算出することすら困難であることが分かる．品種数 100 のインスタンスの内の 8 インスタンスの最適解を算出することができず近似解となった．品種数 200 以上のインスタンスの内の 18 インスタンスの最適解を算出できず近似解となり，18 インスタンスで実行可能解すら算出することができていない．セグメント数 5 と比較すると，未解数，平均計算時間ともに増加している．なお，平均誤差は同一であるが，これには増加した未解数の分を含んでいない．

これらの数値実験はアークフローを用いた定式化を，直接，最適化ソルバーを用いて解いたものである．規模が大きなインスタンスでは，変数や制約式のが膨大な数となることから，計算時間内で線形緩和問題を最適に解くことができていない．このため，線形緩和解をもとにする分枝限定法などで実行可能解を探索する以前に，計算時間の制限に達しているため，実行可能解を算出することができていない．本研究で使用したインスタンスの規模に対しては，パスフローを用いた定式化をもとにした列生成法と組み合わせることにより，その線形緩和問題を相対的には容易に解くことができると考えられるため，パスフローを用いた定式化をもとにした列生成法が必要となる．加えて，最適化ソルバーの分枝限定法では，適切な近似解を求めることが必ずしも可能ではないため，メタヒューリスティクスや他のヒューリスティクスと組み合わせたマスヒューリスティクスの開発が必要である．

6 おわりに

本研究では，ノード上の資源配置を求める施設配置とアーク上の資源配置とフローを求めるネットワーク設計を同時に考慮する問題を対象とし，資源数が整数値をとるモデルと費用が区分的線形関数となるモデル上に対して，複数の移動時間基準に対するカバー率を考慮した問題を扱った．アークフローを用いた定式化とパスフローを用いた定式化を示し，パスフローを用いた定式化に対する列生成法を示した．また，ベンチマーク問題を用いて，2つの定式化について数値実験を行い，問題による求解の困難性を明らかにした．数値実験はアークフローを用いた陽的に定式化されたものを最適化ソルバーで解くことによって行った．しかしながら，整数変数や0-1変数の数が多く，実数変数も膨大がものとなるモデルであることから，使用したベンチマーク問題においても，一定の計算時間の下で実行可能解すら算出できないインスタンスが存在することが示された．このように，アークフローによる定式化を直接解くことには限界があるため，列生成法の適用による緩和問題の縮小化が必要であり，同時に，メタヒューリスティクスやマスヒューリスティクスなどの解法の開発や事例データを用いた分析の実施など，多くの課題が残されている．

参考文献

Alumur, S.A., J.F. Campbell, I. Contreras, B.Y. Kara, V. Marianov, M.E. O'Kelly. 2021. Perspectives on modeling hub location problems. *European Journal of Operational Research* **291**(1) 1–17.

Balakrishnan, A., C.V. Karsten. 2017. Container shipping service selection and cargo routing with transshipment limits. *European Journal of Operational Research* **263**(2) 652 – –663.

Belotti, P., F. Malucelli, L. Brunetta. 2007. Multicommodity network design with discrete node costs. *Networks* **49**(1) 90–99.

Bienstock, D., I. Saniee. 2001. ATM network design:traffic models and optimization-based heuristics. *Telecommunication Systems* **16**(3) 399–421.

Camargo, R.S., G. Miranda, A. Lokketangen. 2013. A new formulation and an exact approach for the many-to-many hub location-routing problem. *Applied Mathematical Modelling* **37**(12) 7465–7480.

Camargo, R.S., G. Miranda, Morton M.E. O'Kelly, J.F. Campbell. 2017. Formulations and decomposition methods for the incomplete hub location network design problem with and without hop-constraints. *Applied Mathematical Modelling* **51**(1) 274–301.

Campbell, J.F., A.T. Ernst, M. Krishnamoorthy. 2005a. Hub arc location problems: Part ii—formulations and optimal algorithms. *Management Science* **51**(10) 1556–1571.

Campbell, J.F., A.T. Ernst, M. Krishnamoorthy. 2005b. Hub arc location problems: Part i—introduction and results. *Management Science* **51**(10) 1540–1555.

Campbell, J.F., M.E. O'Kelly. 2012. Twenty-five years of hub location research. *Transportation Science* **46(2)**(2) 153–169.

Catanzaro, D., E. Gourdin, M. Labbé, F. A. Özsoy. 2011. A branch-and-cut algorithm for the partitioning-hub location-routing problem. *Computers & Operations Research* **38**(2) 539–549.

Contreras, I., E. Fernández, A. Marín. 2009. Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem. *Computers & Operations Research* **36**(12) 3117–3127.

Contreras, I., E. Fernández, A. Marín. 2010. The tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research* **202**(2) 390–400.

Contreras, I., M. Tanash, N. Vidyarthi. 2017. Exact and heuristic approaches for the cycle hub location problem. *Annals of Operations Research* **258** 655–677.

Crainic, T. G., A. Frangioni, B. Gendron. 2001. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. *Discrete Applied Mathematics* **112**(1-3) 73–99.

Crainic, T.G., M. Gendreau, B.Gendron, eds. 2021. *Network Design with Applications to Transportation and Logistics*. Springer, Cham.

Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2003. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science* **49** 1268–1273.

Gelareh, S., R.N. Monemi, S. Nickel. 2015. Multi-period hub location problems in transportation. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **75** 67–94.

Gelareh, S., S. Nickel, D. Pisinger. 2010. Liner shipping hub network design in a competitive environment. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **46**(6) 991–1004.

Hellsten, E., D.F. Koza, I. Contreras, J.F. Cordeau, D. Pisinger. 2021. The transit time constrained fixed charge multi-commodity network design problem. *Computers & Operations Research* **136** 105511.

Karsten, C.V., B.D. Brouer, D. Pisinger. 2017. Time constrained liner shipping network design. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **105** 152–162.

Koza, D.F., G. Desaulniers, S. Ropke. 2020. Integrated liner shipping network design and scheduling. *Transportation Science* .

Kröller, A., R. Wessäly. 2003. Integrated optimization of hard-ware configuration and capacity dimensioning in SDH and opaque WDM networks. *Proceedings of International Network Optimization Conference*. Paris.

Labbé, M., H. Yaman. 2008. Solving the hub location problem in a star − star network. *Networks* **51**(1) 19–33.

Laporte, G., S. Nickel, F. Saldanha. 2015. *Location Science*. Springer, Cham.

Martins, E., R. S. Camargo, G. Miranda. 2013. An improved benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research* **226**(2) 185–202.

Martins, E., I. Contreras, J.F. Cordeau. 2015a. Exact and heuristic algorithms for the design of hub networks with multiple lines. *European Journal of Operational Research* **246**(1) 186–198.

Martins, E., I. Contreras, J.F. Cordeau, R.S. Camargo, G. Miranda. 2015b. The hub line location problem. *Transportation Science* **49**(3) 500–518.

Real, L.B., I. Contreras, J.F. Cordeau, R.S. Camargo, G. Miranda. 2021. Multimodal hub network design with flexible routes. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **146** 102188.

Rodríguez-Martín, I., J. Salazar-González. 2006. An iterated local search heuristic for a capacitated hub location problem. F. Almeida, M. Blesa, C. Blum, J. Vega, M. érez, A. Roli, S. Michael, eds., *Hybrid Metaheuristics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 70–81.

Rodríguez-Martín, I., J.J. Salazar-González, H. Yaman. 2014. A branch-and-cut algorithm for the hub location and routing problem. *Computers & Operations Research* **50** 161–174.

表 1: 問題の属性

問題	ノード	アーク	品種	数	問題	ノード	アーク	品種	数
C	100	400	10	3	R	10	83	25	9
C	100	400	30	2	R	10	83	50	9
C	20	230	040	3	R	20	120	40	9
C	20	230	200	4	R	20	120	100	9
C	20	300	040	4	R	20	120	200	9
C	20	300	200	4	R	20	220	40	9
C	30	520	100	4	R	20	220	100	9
C	30	520	400	4	R	20	220	200	9
C	30	700	100	4	R	20	315	40	9
R	10	60	10	9	R	20	315	100	9
R	10	60	25	9	R	20	315	200	9
R	10	83	10	9					

Rothenbcher, A., M. Drexl, S. Irnich. 2016. Branch-and-price-and-cut for a service network design and hub location problem. *European Journal of Operational Research* **255**(3) 935–947.

Sasaki, M., J.F. Campbell, M. Krishnamoorthy, A.T. Ernst. 2014. A stackelberg hub arc location model for a competitive environment. *Computers & Operations Research* **47** 27–41.

Tanash, M., I. Contreras, N. Vidyarthi. 2017. An exact algorithm for the modular hub location problem with single assignments. *Computers & Operations Research* **85** 32–44.

Thomadsen, T., J. Larsen. 2007. A hub location problem with fully interconnected backbone and access networks. *Computers & Operations Research* **34**(8) 2520–2531.

Tierney, K., J.F. Ehmke, A.M. Campbell, D. M̈uller. 2019. Liner shipping single service design problem with arrival time service levels. *Flexible Services and Manufacturing Journal* **31**(13) 620–652.

Trivella, A., F. Corman, D. F. Koza, D. Pisinger. 2021. The multi-commodity network flow problem with soft transit time constraints: Application to liner shipping. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review* **150** 102342.

Yaman, H. 2008. Star p-hub median problem with modular arc capacities. *Computers & Operations Research* **35**(9) 3009–3019.

表 2: IAF:セグメント数 5 の結果

CR/N/A/K	平均誤差	平均計算時間	最適解数	近似解数	未解数
C100/400/10	0.0	1	3	0	0
C100/400/30	0.0	3	2	0	0
C20/230/40	0.0	0	3	0	0
C20/230/200	0.0	9019	3	0	1
C20/300/40	0.0	0	4	0	0
C20/300/200	0.0	18014	2	0	2
C30/520/100	0.0	32	4	0	0
C30/520/400	0.0	9646	4	0	0
C30/700/100	0.0	14	4	0	0
R10/60/10	0.0	0	9	0	0
R10/60/25	0.0	0	9	0	0
R10/83/10	0.0	0	9	0	0
R10/83/25	0.0	0	9	0	0
R10/83/50	0.0	0	9	0	0
R20/120/40	0.0	3	9	0	0
R20/120/100	0.0	4369	9	0	0
R20/120/200	0.5	25837	3	4	2
R20/220/40	0.0	3	9	0	0
R20/220/100	0.0	52	9	0	0
R20/220/200	0.1	13186	7	2	0
R20/315/40	0.0	0	9	0	0
R20/315/100	0.0	24	9	0	0
R20/315/200	0.1	8127	7	2	0
平均／計	0.0	3869	145	8	5

表 3: IAF:セグメント数 10 の結果

CR/N/A/K	平均誤差	平均計算時間	最適解数	近似解数	未解数
C100/400/10	0.0	3	3	0	0
C100/400/30	0.0	4	2	0	0
C20/230/40	0.0	0	3	0	0
C20/230/200	0.0	9517	3	0	1
C20/300/40	0.0	1	4	0	0
C20/300/200	0.0	18042	2	0	2
C30/520/100	0.0	274	4	0	0
C30/520/400	0.0	11390	4	0	0
C30/700/100	0.0	12	4	0	0
R10/60/10	0.0	0	9	0	0
R10/60/25	0.0	0	9	0	0
R10/83/10	0.0	0	9	0	0
R10/83/25	0.0	0	9	0	0
R10/83/50	0.0	0	9	0	0
R20/120/40	0.0	3	9	0	0
R20/120/100	0.0	6381	9	0	0
R20/120/200	0.6	27866	3	5	1
R20/220/40	0.0	2	9	0	0
R20/220/100	0.0	66	9	0	0
R20/220/200	0.3	20634	4	5	0
R20/315/40	0.0	0	9	0	0
R20/315/100	0.0	40	9	0	0
R20/315/200	0.1	5896	8	1	0
平均／計	0.1	4462	143	11	4

表 4: PAF:セグメント数 5 の結果

CR/N/A/K	平均誤差	平均計算時間	最適解数	近似解数	未解数
C100/400/10	0.0	51	3	0	0
C100/400/30	0.0	135	2	0	0
C20/230/40	0.0	2	3	0	0
C20/230/200	2.7	36000	0	3	1
C20/300/40	0.0	3	4	0	0
C20/300/200	0.2	30666	1	1	2
C30/520/100	0.0	12377	4	0	0
C30/520/400	4.2	36000	0	4	0
C30/700/100	0.0	156	4	0	0
R10/60/10	0.0	0	9	0	0
R10/60/25	0.0	3	9	0	0
R10/83/10	0.0	0	9	0	0
R10/83/25	0.0	0	9	0	0
R10/83/50	0.0	4	9	0	0
R20/120/40	0.0	75	9	0	0
R20/120/100	1.1	24402	5	4	0
R20/120/200	7.8	36000	0	8	1
R20/220/40	0.0	36	9	0	0
R20/220/100	0.0	6594	9	0	0
R20/220/200	7.1	36000	0	9	0
R20/315/40	0.0	9	9	0	0
R20/315/100	0.0	1650	9	0	0
R20/315/200	3.4	28744	2	6	1
平均／計	1.2	10525	118	35	5

表 5: PAF:セグメント数 10 の結果

CR/N/A/K	平均誤差	平均計算時間	最適解数	近似解数	未解数
C100/400/10	0.0	67	3	0	0
C100/400/30	0.0	5824	2	0	0
C20/230/40	0.0	5	3	0	0
C20/230/200	3.5	36000	0	3	1
C20/300/40	0.0	8	4	0	0
C20/300/200	0.4	31952	1	1	2
C30/520/100	1.0	17067	3	1	0
C30/520/400	4.6	36000	0	1	3
C30/700/100	0.0	3208	4	0	0
R10/60/10	0.0	0	9	0	0
R10/60/25	0.0	2	9	0	0
R10/83/10	0.0	0	9	0	0
R10/83/25	0.0	1	9	0	0
R10/83/50	0.0	6	9	0	0
R20/120/100	5.9	32367	2	7	0
R20/120/200	7.1	36000	0	1	8
R20/120/40	0.0	343	9	0	0
R20/220/100	0.0	11888	9	0	0
R20/220/200	9.2	36000	0	5	4
R20/220/40	0.0	107	9	0	0
R20/315/100	0.0	2469	9	0	0
R20/315/200	4.8	33548	2	7	0
R20/315/40	0.0	9	9	0	0
平均／計	1.2	12866	114	26	18