

# 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題のラグランジュ緩和

## Lagrangian Relaxations for Multicommodity Network Design Model with Integer Assets

片山 直登 流通経済大学 流通情報学部

平成32年8月24日

### 1 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題

ネットワーク設計問題は、多品種のフローが流れるネットワーク上で、アーク（またはノード）にアセット（資源）を割り当てる問題である。ここでは、アークに整数個のアセット割り当てる整数アセットを考慮したネットワーク設計問題 (*IADP*) を対象とする。

ノード集合を  $N$ 、アーク集合を  $A$ 、品種集合を  $K$ 、アーク  $(i, j)$  上に割り当てられるアセット数の集合を  $S_{ij}$ 、ノード  $n$  を終点とするアークの始点集合を  $N_n^+$ 、ノード  $n$  を始点とするアークの終点集合を  $N_n^-$  とする。また、アーク  $(i, j)$  上の品種  $k$  の単位当たりのフロー費用を  $c_{ij}^k$ 、アーク  $(i, j)$  上の単位当たりのアセット費用を  $f_{ij}$ 、単一のアセット容量を  $b_{ij}$  とし、品種  $k$  の需要量を  $q^k$  とし、 $n$  が品種  $k$  の始点であるとき  $-1$ 、終点であるとき  $1$ 、それ以外は  $0$  である定数を  $d_n^k$  とする。アーク  $(i, j)$  上に  $s$  個のアセットが割り当てられるとき  $1$ 、そうでないとき  $0$  であるアセット変数を  $y_{ij}^s$ 、アーク  $(i, j)$  上を流れる品種  $k$  のフローの比率を表すアークフロー変数を  $x_{ij}^k$ 、アーク  $(i, j)$  上の  $s-1$  から  $s$  個分のアセット容量の範囲内に流れる品種  $k$  のフローの比率を表すアセットフロー変数を  $u_{ij}^{ks}$  とする。このとき、アークフローによる定式化 *AF* は次のようになる (Croxtton et al. 2003, 2007)。

*AF* :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} q^k c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (2)$$

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (6)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (7)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (8)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (9)$$

$AF$ は混合整数計画問題であるため、大規模な問題を最適に解くことは困難である。最適に解くための一端として緩和問題を解き、問題の下界値を求めることが行われる。緩和問題としては、離散条件を線形条件に緩和する線形緩和と一部の制約条件を目的関数に組み込むラグランジュ緩和が知られている。本研究では、 $IADP$ に対する2つのラグランジュ緩和問題と解法を示す。さらに、数値実験により、2つのラグランジュ緩和問題、アークフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題およびパスフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題による下界値の比較を行う。

## 2 ラグランジュ緩和問題

### 2.1 フロー保存式のラグランジュ緩和

$AF$ において、フロー保存式である(2)式をラグランジュ緩和した問題を示す。(2)式のノード $n$ 、品種 $k$ に対するラグランジュ乗数を $v_n^k$ とおく。ラグランジュ乗数 $v$ を用いて、(2)式をラグランジュ緩和した問題 $LF(v)$ は次のようになる(Frangionia and Gendron 2009, Gendron and Gouveia 2017)。

$LF(v)$  :

$$\phi(v) = \min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} (q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s + \sum_{k \in K} (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k) \quad (10)$$

subject to

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (11)$$

$$(s-1)b_{ij}y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (12)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (14)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (15)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (16)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (17)$$

ここで、 $O^k$  は品種  $k$  の始点、 $D^k$  は品種  $k$  の終点であり、 $\phi(v)$  は  $LF(v)$  の最適値である。

ラグランジュ乗数  $v$  が与えられたとき、目的関数の第3項は定数項となるため、 $LF(v)$  はアーク  $(i, j)$  ごとに独立した問題  $LF_{ij}(v)$  に分割することができる。

$LF_{ij}(v)$  :

$$\phi_{ij}(v) = \min \sum_{k \in K} \left( q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) x_{ij}^k + \sum_{s \in S_{ij}} s f_{ij} y_{ij}^s \quad (18)$$

subject to

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, \quad (19)$$

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, \quad (20)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (21)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1, \quad (22)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (23)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, \quad (24)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (25)$$

ここで、 $\phi_{ij}(v)$  は  $LF_{ij}(v)$  の最適値である。

この緩和問題には  $|S_{ij}|$  個の0-1変数である  $y_{ij}^s$  が含まれている。(22)式より、 $|S_{ij}|$  個の内の高々1個の  $y_{ij}^s$  が1をとることになる。そこで、アセット数が  $s$  であるアセット変数  $y_{ij}^s$  について1、それ以外のアセット変数について0と固定した問題  $LF_{ij}^s$  を考える。自動的に(21)式、(22)式と(25)式は満たされ、また(21)式よりアセット数が  $s$  以外のアセット数  $s'$  をもつアセットフロー変数  $u_{ij}^{ks'}$  は0となる。さらに、(19)式より  $x_{ij}^k$  と  $u_{ij}^{ks}$  は一致するので、 $x_{ij}^k$  は  $u_{ij}^{ks}$  で置き換えることができる。

以上のことから、アセット数  $s$  に関する問題  $LF_{ij}^s(v)$  は、次のように表すことができる。

$LF_{ij}^s(v)$  :

$$\phi_{ij}^s(v) = \min \sum_{k \in K} \left( q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) u_{ij}^{ks} + s f_{ij} \quad (26)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij}, \quad (27)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K. \quad (28)$$

ここで、 $\phi_{ij}^s(v)$  は  $LF_{ij}^s(v)$  の最適値である。

$LF_{ij}^s(v)$  は連続ナップサック問題となるので容易に解くことができる．ここで， $u_{ij}^{ks}$  に関する目的関数の係数と制約式の係数の比率を  $h(k)$  とおく．

$$h(k) = \left( q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) / q^k \quad \forall k \in K. \quad (29)$$

$h(k) (k \in K)$  を昇順にソートして並べ替え，その順で品種に  $m = 1, \dots, |K|$  と番号を付け直す．この順において， $h(m)$  が負で最大である品種の番号を  $\hat{m}$  とおく．

$$\hat{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } h(1) \geq 0 \\ m & \text{if } h(m) < 0 \text{ and } h(m+1) \geq 0 \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (30)$$

また， $\sum_{l=1}^m q^l < (s-1) b_{ij}$  を満たす最大の  $m$  を  $\bar{m}$  とする．

$$\bar{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } q^1 \geq (s-1) b_{ij} \\ m & \text{if } \sum_{l=1}^m q^l < (s-1) b_{ij} \\ & \text{and } \sum_{l=1}^{m+1} q^l \geq (s-1) b_{ij} \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (31)$$

さらに， $\sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij}$  を満たす最大の  $m$  を  $\tilde{m}$  とする．

$$\tilde{m} = \begin{cases} 0 & \text{if } q^1 \geq s b_{ij} \\ m & \text{if } \sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij} \\ & \text{and } \sum_{l=1}^{m+1} q^l \geq s b_{ij} \\ |K| & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (32)$$

最後に， $m^*$  を次のようにおく．

$$m^* = \max \{ \bar{m}, \min(\hat{m}, \tilde{m}) \}. \quad (33)$$

このとき， $LF_{ij}^s(v)$  におけるアセットフロー変数の最適解  $\tilde{u}$  は次のようになる．

$$\tilde{u}_{ij}^{ms} = \begin{cases} 1 & \text{if } m \leq m^* \\ \left\{ (s-1) b_{ij} - \sum_{l=1}^{\bar{m}} q^l \right\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \bar{m} \\ \left( s b_{ij} - \sum_{l=1}^{\hat{m}} q^l \right) / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \hat{m} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \forall m = 1 \dots |K|. \quad (34)$$

また，最適値  $\phi_{ij}^s(v)$  は次のようになる．

$$\phi_{ij}^s(v) = \sum_{k \in K} \left( q^k c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k \right) \tilde{u}_{ij}^{ks} + s f_{ij}. \quad (35)$$

$\phi_{ij}(v)$  は  $s \in S_{ij}$  の最適値  $\phi_{ij}^s(v)$  とすべての  $y_{ij}^s$  が 0 のときの最適値である 0 の中で最も小さい値となるので，次のようになる．

$$\phi_{ij}(v) = \min \left( 0, \min_{s \in S_{ij}} \phi_{ij}^s(v) \right). \quad (36)$$

最終的に、 $LF(v)$  の最適値  $\phi(v)$  は次のようになる。

$$\phi(v) = \sum_{(i,j) \in A} \phi_{ij}(v) + \sum_{k \in K} (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k). \quad (37)$$

$LF(v)$  におけるアセット変数  $y$  の最適解  $\hat{y}$  は次のようになる

$$\hat{y}_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{if } s = \arg \min_{l \in S_{ij}} \left\{ \phi_{ij}^l(v) = \min_{r \in S_{ij}} \phi_{ij}^r(v) \text{ and } \phi_{ij}^l(v) < 0 \right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A. \quad (38)$$

なお、複数のアセットで  $\phi_{ij}^s(v)$  の最小値が負で同値な場合があるため、最小の添え字のものだけを1としている。また、アセットフロー変数の最適解  $\hat{u}$  は次のようになる。

$$\hat{u}_{ij}^{ks} = \tilde{u}_{ij}^{ks} \hat{y}_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A. \quad (39)$$

$|S|$  を  $|S_{ij}|$  の最大値としたとき、 $LF(v)$  を解くための計算量は  $|A||S||K|\log|K|$  となる。

## 2.2 接続式のラグランジュ緩和

$AF$  において、アークフロー変数とアセットフロー変数の接続式である (3) 式をラグランジュ緩和した緩和問題を示す。なお、(3) 式は次のような不等式に置き換えることができる。

$$x_{ij}^k \leq \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A. \quad (40)$$

(40) 式のアーク  $(i,j)$ 、品種  $k$  に対する非負のラグランジュ乗数を  $w_{ij}^k (\geq 0)$  とおく。ラグランジュ乗数  $w$  を用いて (40) 式をラグランジュ緩和した問題  $LC(w)$  は、次のようになる。

$LC(w)$  :

$$\omega(w) = \min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} (q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k) x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left( s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (41)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (42)$$

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \quad (43)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i,j) \in A, \quad (44)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i,j) \in A, \quad (45)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (46)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in K \quad (47)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (48)$$

ここで、 $\omega(w)$  は  $LC(w)$  の最適値である。

$LC(w)$  は独立したアーク  $x$  に関する問題  $LC^x(w)$  とアセットフロー  $u$  とアセット変数  $y$  に関する問題  $LC^{uy}(w)$  に分離することができる。

$LC^x(w)$  :

$$\min \sum_{k \in K} \left( q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k \right) x_{ij}^k \quad (49)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (50)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, k \in K. \quad (51)$$

$LC^{uy}(w)$  :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left( s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (52)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (53)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (54)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (55)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (56)$$

さらに、 $LC^x(w)$  は品種  $k$  ごとの独立した問題  $LC^{xk}(w)$  に分離できる。

$LC^{xk}(w)$  :

$$\chi^k(w) = \min \left( q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k \right) x_{ij}^k \quad (57)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n \in N, \quad (58)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \quad (59)$$

ここで、 $\chi^k(w)$  は  $LC^{xk}(w)$  の最適値である。

$LC^{xk}(w)$  はアーク  $(i, j)$  の長さを  $q^k c_{ij}^k + w_{ij}^k$  としたネットワーク上で、品種  $k$  の最短経路を求める問題となる。 $w_{ij}^k$  は非負であり、アークの長さも非負となるので、効率的に最短経路問題を解くことができる。

一方,  $LC^{uy}(w)$  はアーク  $(i, j)$  ごとの独立した問題  $LC_{ij}^{uy}(w)$  に分離できる.

$LC_{ij}^{uy}(w)$ :

$$\psi_{ij}(w) = \min \sum_{s \in S_{ij}} \left( s f_{ij} y_{ij}^s - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \right) \quad (60)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, \quad (61)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1, \quad (62)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, \quad (63)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}. \quad (64)$$

ここで,  $\psi_{ij}(w)$  は  $LC_{ij}^{uy}(w)$  の最適値である.

アセット変数の選択式である (62) 式から,  $LC_{ij}^{uy}(w)$  では高々1つのアセット変数が1となる. アセット  $s$  に対する  $y_{ij}^s$  の値を1とおくと, これ以外のアセット変数の値は0となり, (61) 式から関連するアセットフロー変数も0となる. このとき, アセット  $s$  に対する問題  $LC_{ij}^{uys}(w)$  は次のようになる.

$LC_{ij}^{uys}(w)$ :

$$\psi_{ij}^s(w) = \min s f_{ij} - \sum_{k \in K} w_{ij}^k u_{ij}^{ks} \quad (65)$$

subject to

$$(s-1) b_{ij} \leq \sum_{k \in K} q^k u_{ij}^{ks} \leq s b_{ij}, \quad (66)$$

$$0 \leq u_{ij}^{ks} \leq 1 \quad \forall k \in K. \quad (67)$$

ここで,  $\psi_{ij}^s(w)$  は  $LC_{ij}^{uys}(w)$  の最適値である.

$LC_{ij}^{uys}(w)$  は, 連続ナップサック問題となるので容易に解くことができる. この問題は  $LF_{ij}^s(v)$  と同様な問題となるので,  $LC_{ij}^{uys}(w)$  におけるアセットフロー変数の最適解  $\tilde{u}$  は次のようになる.

$$\tilde{u}_{ij}^{ms} = \begin{cases} 1 & \text{if } m \leq m^* \\ \{(s-1) b_{ij} - \sum_{l=1}^{\bar{m}} q^l\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \bar{m} \\ \{s b_{ij} - \sum_{l=1}^{\hat{m}} q^l\} / q^l & \text{if } m = m^* \text{ and } m^* = \hat{m} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall m = 1 \dots |K|. \quad (68)$$

ここで,  $w_{ij}^k (k \in K)$  を昇順にソートし,  $\hat{m}$  はそれらの値が負で最大である  $m$ ,  $\bar{m}$  は  $\sum_{l=1}^m q^l < s b_{ij}$  を満たす最大の  $m$ ,  $\tilde{m}$  は  $\sum_{l=1}^m q^l < (s-1) b_{ij}$  を満たす最大の  $m$  であり,  $m^* = \max\{\bar{m}, \min(\hat{m}, \tilde{m})\}$  である.

$LC_{ij}^{uys}(w)$  の最適値  $\psi_{ij}^s$  は次のようになる。

$$\psi_{ij}^s = sf_{ij} - \sum_{k \in K} w_{ij}^k \tilde{u}_{ij}^{ks}. \quad (69)$$

また、 $LC_{ij}^{uy}(w)$  の最適解  $\psi_{ij}(w)$  は次のようになる。

$$\psi_{ij}(w) = \min \left( 0, \min_{s \in S_{ij}} \psi_{ij}^s(w) \right). \quad (70)$$

最終的に、 $LC(w)$  の最適値  $\omega(w)$  は次のようになる。

$$\omega(w) = \sum_{(i,j) \in A} \psi_{ij}(w) + \sum_{k \in K} \chi^k(w). \quad (71)$$

なお、アセット変数  $\hat{y}$  の最適解は次のようになる

$$\hat{y}_{ij}^s = \begin{cases} 1 & \text{if } s = \arg \min_{l \in S_{ij}} \left\{ \psi_{ij}^l(v) = \min_{r \in S_{ij}} \psi_{ij}^r(v) \text{ and } \psi_{ij}^l(v) < 0 \right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (72)$$

また、アセットフロー変数の最適解  $\hat{u}$  は次のようになる。

$$\hat{u}_{ij}^{ks} = \tilde{u}_{ij}^{ks} \hat{y}_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (73)$$

$|S|$  を  $|S_{ij}|$  の最大値としたとき、 $LC(w)$  を解くための計算量は、 $|A||S||K|\log|K| + |K||N|^2$  となる。

### 2.3 劣勾配法

ラグランジュ緩和問題におけるラグランジュ乗数を適切に設定する手法として、劣勾配法がある (Held et al. 1974)。これは、目的関数におけるラグランジュ緩和した制約式の値との差異である劣勾配を用いてラグランジュ乗数を変更し、適切な緩和解を求める方法である。

$LF(v)$  におけるラグランジュ乗数  $v$  に対する劣勾配  $\pi$  は次のようになる。

$$\pi_n^k = d_n^k - \sum_{n \in N_n^+} x_{in}^k + \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k \quad \forall n \in N, k \in K. \quad (74)$$

適当な初期値から始め、 $v$  を次のように更新する。

$$v_n^k := v_n^k + \alpha \pi_n^k \quad \forall n \in N, k \in K. \quad (75)$$

ここで、 $\alpha$  はステップサイズであり、適当な上界値を  $UB$ 、下界値を  $LB$  として、 $\beta$  を  $(0, 2)$  のパラメータとしたとき、次のようになる。

$$\alpha = \frac{\beta(UB - LB)}{\sum_{k \in K} \sum_{n \in N} (\pi_n^k)^2}. \quad (76)$$



$UB$  が最適値の場合，劣勾配法の繰り返しごとに最適値との距離が減少する．しかし， $UB$  が最適値でない場合は下界値との差が大きくなるため，ステップサイズが過大になってしまう．そのため，暫時， $\beta$  を減少させることが必要となる．

1回の繰り返しにおける劣勾配法の計算量は  $|N||K|$  であり，劣勾配法の繰り返し回数を  $|M|$  とする． $LF(v)$  を解くための計算量と合わせると， $LF(v)$  の下界値を求めるための計算量は  $|M||A||S||K|\log|K|$  となる．

一方， $LC(w)$  におけるラグランジュ乗数  $w$  に対する劣勾配  $\rho$  は次のようになる．

$$\rho_{ij}^k = x_{ij}^k - \sum_{s \in S_{ij}^k} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (77)$$

適当な初期値から始め， $w$  を次のように更新する．

$$w_{ij}^k := w_{ij}^k + \alpha \rho_{ij}^k \quad \forall k \in K, (i, j) \in A. \quad (78)$$

ここで， $\alpha$  はステップサイズであり，次のようになる．

$$\alpha = \frac{\beta(UB - LB)}{\sum_{k \in K} \sum_{(i, j) \in A} (\rho_{ij}^k)^2}. \quad (79)$$

1回の繰り返しにおける劣勾配法の計算量は  $|A||K|$  であり， $LC(w)$  を解くための計算量と合わせると， $LC(w)$  の下界値を求めるための計算量は  $|M||K|(|A||S|\log|K| + |N|^2)$  となる．

## 2.4 数値実験

数値実験により， $IADP$  に対する2つのラグランジュ緩和問題に加え，アークフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題およびパスフロー変数を用いた定式化の線形緩和問題による下界値の比較を行う．

数値計算のためのインスタンスは，Crainic et al. (2001) が示したC問題をもとに，Frangionia and Gendron (2009) が示したものと同一条件を用いて生成する．なお，これらのインスタンスは公開されていないために数値に若干の相違がある可能性がある．各インスタンスは，Crainic et al. (2001) のにおけるC問題の容量レベルを4つの容量レベルに展開する．C問題における各インスタンスにおけるアーク  $(i, j)$  の容量を  $C_{ij}$ ，品種  $k$  の需要量を  $d^k$  としたとき，容量レベル  $e$  を次のようにおく．

$$e = |A| \sum_{k \in K} d^k / \sum_{(i, j) \in A} C_{ij}. \quad (80)$$

$e = 1$  のとき，アーク容量の平均値  $\sum_{(i, j) \in A} C_{ij} / |A|$  が総需要に一致する． $e$  が小さいときには緩い容量制約となり， $e$  が大きいときにはタイトな容量制約となる．C問題の4クラス31インスタンスに対して， $e = 1, 4, 8, 16$  の4容量レベルの124インスタンスについて数値実験を行う．Crainic et al. (2001) におけるアーク  $(i, j)$  の容

量を  $C_{ij}$  とアーク費用を  $F_{ij}$  としたときにアセット容量  $b_{ij}$  とアセット費用  $f_{ij}$  を次のように設定する.

$$b_{ij} = \left\lfloor \frac{C_{ij}}{e} \right\rfloor, \quad f_{ij} = \left\lfloor \frac{F_{ij}}{e} \right\rfloor \quad \forall (i, j) \in A. \quad (81)$$

また, アーク  $(i, j)$  上の最大アセット数  $|S_{ij}|$  は需要合計をアセット容量で割ったものを切り上げた値とする.

$$|S_{ij}| = \left\lceil \frac{\sum_{k \in K} q^k}{b_{ij}} \right\rceil \quad \forall (i, j) \in A. \quad (82)$$

インスタンスは, 容量レベル, ノード数, アーク数と品種数によって分類される. 2つの文字によって, 同一の分類内のインスタンスの性質を区別する. Fは固定費用に対してフロー費用が相対的に高く, Vはフロー費用が相対的に低いインスタンスである. Tは容量が相対的にきつく, Lは相対的に緩いインスタンスである.

数値実験で使用した設定した機器等は以下の通りである.

- 使用 OS および言語 : UBUNTU Ver.18, C++
- 最適化ソルバー : Gurobi Ver.9
- CPU AMD Ryzen7 1800X 3.6GHz 8Cores, RAM 64GByte

数値実験で使用した設定したパラメータは以下の通りである.

- 劣勾配法の繰り返し回数 : 1000, 10000, 100000
- $\beta$  の初期値 : 品種数 40 : 1.00, それ以外 : 0.175
- $\beta$  の変更 : 1000 回ごとに 0.95 倍

上界値には,  $AF$  を最適化ソルバーである Gurobi を用い, 最大計算時間を 100 時間として求めた上界値と MIP 近似解法 (片山直登 2020a) で求めた上界値の小さい方を用いた.

なお,  $AF$  の線形緩和問題の最適双対解をラグランジュ乗数に用いると最適な下界値に近い値を求めることができる (Gendron and Gouveia 2017). しかし, 大規模なインスタンスにおける線形緩和問題を解くこと自体が膨大な計算時間を必要とする (片山直登 2020b). (5) 式を取り除いた  $AF$  の線形緩和問題は極めて短時間で最適化ソルバーを用いて解くことができることから, ここではこの問題の最適双対解をラグランジュ乗数の初期値とする.

フロー保存式をラグランジュ緩和した問題  $LF$  で劣勾配法の繰り返し回数を 1000 回, 10000 回, 100000 回とした結果をそれぞれ F1000, F0000, F100000(以下 LF) とする. また, アークフロー変数とアセットフロー変数の接続式をラグランジュ緩和した問題  $LC$  で劣勾配法の繰り返し回数を 1000 回, 10000 回, 100000 回とした結果をそれぞれ C1000, C10000, C100000(以下 LC) とする. 比較のために,  $AF$  から (5) 式を取り除いた弱い定式化に対する線形緩和問題を最適化ソルバーに

より解いて求めた最適値 (LP-W),  $AF$  の線形緩和問題を最適化ソルバーにより最大 30 時間の計算時間で解いて求めた最適値 (LP-S), パスフローを用いた定式化の線形緩和問題を列生成法で解いて求めた最適値 (LP-P) と比較をする. これらの最適値はいずれも  $AF$  の下界値となる.

表 1 に, 緩和問題, 容量レベルと品種数ごとに集計した下界値の上界値との誤差 (Gap) を示す. なお, ラグランジュ緩和では LF と LC の結果を示す. また, 上界値を  $UB$ , 各緩和問題から得られた下界値を  $LB$  としたとき, 誤差を次式で算出した.

$$Gap = \frac{UB - LB}{LB}.$$

弱い定式化による下界値 LP-W では, 容量レベル 1 の平均誤差が 351.46%, 容量レベル 4 では 116.82%, 容量レベル 8 では 64.62%, 容量レベル 16 では 33.85% であり, 全体の平均誤差は 141.69% である. 容量レベル 1 においては下界値が上界値の 4 分 1 程度であり, レベル 16 でも誤差が 30% 以上と大きい.

LP-S と LP-P とそれらの線形緩和問題は等価な問題であり, 線形緩和問題の最適値は同値となる. LP-S では, 容量レベル 1 の平均誤差が 8.17%, 容量レベル 4 では 7.45%, 容量レベル 8 では 5.46%, 容量レベル 16 では 3.11% であり, 全体の平均誤差は 6.05% である. また, 品種数 40 では 0.64%, 品種数 100 では 5.46%, 品種数 200 では 7.85%, 品種数 400 では 9.56% である. LP-P では, 容量レベル 1 の平均誤差が 8.17%, 容量レベル 4 では 7.45%, 容量レベル 8 では 5.46%, 容量レベル 16 では 3.02% であり, 全体の平均誤差は 6.02% である. また, 品種数 40 では 0.64%, 品種数 100 では 5.46%, 品種数 200 では 7.85%, 品種数 400 では 9.48% である. LP-S では容量レベル 16 の 400 品種の問題で緩和の最適値を求めることができていないインスタンスが存在するため, LP-P に比べて容量レベル 16 の 400 品種で誤差が 0.35% 悪化している. このように,  $IADP$  は上界値と線形緩和問題による下界値の差である双対ギャップが大きなことが確認でき, 下界値を用いる分枝限定法などの解法が有効に機能しないことが分かる.

一方,  $LF$  と  $AF$  の線形緩和問題における 2 つの最適な下界値も一致する (Frangionia and Gendron 2009) ことが示され  $LF$  において, 容量レベル 1 の平均誤差が 8.21%, 容量レベル 4 では 7.48%, 容量レベル 8 では 5.48%, 容量レベル 16 では 3.03% である. 全体の平均誤差は 6.05% であり, LP-P と比べて 0.03% 大きい. また, 品種数 40 では 0.64%, 品種数 100 では 5.52%, 品種数 200 では 7.86%, 品種数 400 では 9.50% である.  $LC$  において, 容量レベル 1 の平均誤差が 8.21%, 容量レベル 4 では 7.46%, 容量レベル 8 では 5.47%, 容量レベル 16 では 3.02% である. 全体の平均誤差は 6.04% であり, LP-P と比べて 0.02% 大きい. また, 品種数 40 では 0.64%, 品種数 100 では 5.49%, 品種数 200 では 7.86%, 品種数 400 では 9.49% である. LP-P と比べると,  $LF$  は 0.01 から 0.04%,  $LC$  も 0.01 から 0.04% 誤差が大きい. これは, 繰り返し回数の上限を定めた劣勾配法は近似解法であり, 必ずしも最適な下界値を算出できないためである.

ラグランジュ緩和では  $LF$  と  $LC$  では, ほぼ同じ下界値が求められているが,  $LC$  の方が少し良い下界値を算出している. 劣勾配法の繰り返し回数に加え, パラ

メータ  $\beta$  の初期値やその変更方法にも誤差が大きく影響される。一方、LF と LC のラグランジュ乗数の初期値に LP-W による最適双対変数を用いている。しかし、この初期値を用いる場合、劣勾配法の初期の繰り返しでは下界値が大きく減少し、数百回の繰り返しの後に上昇に転じることが多いことから、効果的な初期値とはなっていない。

劣勾配法の繰り返し回数を増加させれば誤差は小さくなるが、膨大な計算時間が必要となる。また、劣勾配法のパラメータ  $\beta$  とその変更方法によっても、得られる下界値が異なってくる。問題の最適値と下界値の最適値が一致すれば  $\beta = 1$  が最も適切であるが、得られている上界値と下界値の最適値の差が大きくなればなるほど  $\beta$  は小さい方が適切となる。このことから、パラメータの自動最適化が必要と考える。さらには、ラグランジュ乗数の数が多い場合では劣勾配法にかわる効率的な解法が必要である。

表 2 に、容量レベルと品種数ごとに集計した計算時間を示す。弱い定式化である LP-W では平均計算時間が 8 秒であり、最大でも 56 秒と極めて短時間で下界値を算出しているが、前述のように誤差が非常に大きい。

強い定式化である LP-S では容量レベル 1 の平均計算時間が 46 秒であり、短時間で下界値を算出している。容量レベルと品種数の増加に従って変数と制約式数が増加するために、計算時間が大きく増加する。全体の平均計算時間は 8690 秒、容量レベル 4 では 4037 秒、容量レベル 8 では 10516 秒、容量レベル 16 では 20162 秒である。なお、双対単体法で線形緩和問題を解いた場合、双対実行可能解が見つければ下界値が得られる。ことから、双対実行可能解が見つかった後に計算を打ち切れば、誤差は大きいより小さな計算時間で下界値を算出することができる。しかし、規模が大きなインスタンスでは、双対実行可能解を見つけるまでに大きな時間を要する場合がある。

LP-P では、容量レベル 1 の平均計算時間が 9584 秒と大きな計算時間を必要としているが、容量レベルと品種数の増加に従って計算時間は減少している。全体の平均計算時間は 4341 秒で、容量レベル 4 では 3165 秒、容量レベル 8 では 2429 秒、容量レベル 16 では 2184 秒である。容量レベル 16 の計算時間は、LP-S の約 1/10 となっている。

LC と LF の平均計算時間は劣勾配法の繰り返し回数が 10 万回のものである。LF と LC では、容量レベルと品種数の増加に従って計算時間が大きく増加している。これは、LF の計算量は  $|M||A||S||K|\log|K|$  であり、LC の計算量は  $|M||K|(|A||S|\log|K| + |N|^2)$  であり、アーク数、セグメント数や品種数等に比例するためである。なお、LC よりも LF の計算時間は大きい。計算量からは、最短経路問題の分だけ LC よりも LF の計算時間が必要となると考えられるが、今回の数値実験ではソートにおいて LC よりも LF の方が計算時間を必要としたため、LF の方が全体としての計算時間が大きい。LF の平均計算時間は 6632 秒で、容量レベル 1 では 1494 秒、容量レベル 4 では 4337 秒、容量レベル 8 では 7506 秒、容量レベル 16 では 13190 秒である。40 品種では平均 517 秒、100 品種では 3528 秒、200 品種では 3418 秒、400 品種では 18300 秒である。一方、LC の平均計算時間は 5244 秒

で、容量レベル1では1209秒、容量レベル4では3169秒、容量レベル8では5691秒、容量レベル16では10906秒である。40品種では平均439秒、100品種では2992秒、200品種では2938秒、400品種では14005秒である。

表3は使用した上界値である。これらは、 $AF$ を最適化ソルバーであるGurobiを用い、最大計算時間を100時間として求めた上界値とMIP近似解法で求めた上界値の小さい方である。今回使用した劣勾配法には適切な上界値が必要であり、上界値が悪い場合は解の収束が遅くなったり、適切な下界値に収束しない状況が発生する。

表4、表5および表6は、容量レベル1のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表5において、LP-SとLP-Pの全体の平均誤差はともに8.17%であり、緩和問題の最適値を求めることができている。しかし、誤差が8.17%もあり、分枝限定法などで最適解を求めることが難しい問題であることが再認識される。一方、F1000の平均誤差は10.51%、F10000では8.73%、F100000では8.21%と、劣勾配法の繰り返しとともに減少している。LP-Pの平均誤差との差は、F1000では2.34%、F10000では0.56%、F100000では0.04%である。C1000の平均誤差は13.53%、C10000では8.83%、C100000では8.21%である。LP-Pの平均誤差との差は、C1000では5.36%と大きく、C10000では0.66%、C100000では0.04%である。繰り返し回数1000回の誤差が大きいのは、適切なラグランジュ乗数の初期値と上界値が設定されていない場合には、初期の繰り返しでは大きく下界値が減少し、その後の繰り返しとともに下界値が増加する傾向があるためである。加えて、LCではラグランジュ乗数の数が多いために、下界値の減少が長く続くため、1000回では繰り返し回数が十分でないことを表している。

表6において、LP-Sでは平均計算時間が46秒、最大計算時間が254秒であり、計算時間が大変短い。LP-Pでは平均計算時間が9584秒であり、特に400品種のインスタンスでは最大75717秒と2時間を超え、計算時間が極端に大きい。これは生成される列の数が他の容量レベルに比べて非常に多く、生成とともに変数と制約式が膨大になり、それらの線形計画問題を解くために大きな計算時間を必要とするためである。F10000の平均計算時間は1494秒であり、特に400品種のインスタンスの計算時間が大きく、最大で4809秒で1時間を超える。計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例しており、繰り返し回数1000回で1/100、繰り返し回数1万回で1/10程度である。C10000の平均計算時間は1209秒であり、特に400品種のインスタンスの計算時間が大きく、最大で3754秒と1時間程度である。計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例しており、繰り返し回数1000回で1/100、繰り返し回数1万回で1/10程度である。

表7、表8および表9は、容量レベル4のインスタンスごとの下界値、誤差および計算時間である。表8において、LP-SとLP-Pにおける全体の平均誤差は7.45%であり、容量レベル1の8.17%と比べると、誤差は0.72%減少している。F1000の平均誤差は9.40%、F10000では7.90%、F100000では7.48%と、劣勾配法の繰り返しとともに誤差が減少している。LP-Pの平均誤差との差は、F1000では1.95%、F10000では0.45%、F100000では0.03%である。また、C1000の平均誤差は10.19%、C10000で

は7.92%, C100000では7.46%である。LP-Pの平均誤差との差は, C1000では2.74%, C10000では0.47%, C100000では0.01%である。

表9において, LP-Sでは平均計算時間が4037秒, 最大計算時間が69261秒である。一方, LP-Pでは平均計算時間が3165秒, 最大計算時間が25383秒であり, LP-Sより計算時間が小さい。容量レベル1と比べて, LP-Sの計算時間が大きく増加し90倍以上である。一方, LP-Sの計算時間は大きく減少し, 1/3程度である。F10000の平均計算時間は4337秒であり, 400品種の計算時間が大きく, 最大で13357秒である。C10000の平均計算時間は3169秒であり, 400品種の計算時間が大きく, 最大で9589秒である。

表10, 表11および表12は, 容量レベル8のインスタンスごとの下界値, 誤差および計算時間である。表11において, LP-SとLP-Pの全体の平均誤差は5.46%であり, 容量レベル1の7.45%と比べると, 誤差は1.99%減少している。F1000の平均誤差は7.15%, F10000では5.81%, F100000では5.48%である。LP-Pの平均誤差との差は, F1000では1.69%, F10000では0.35%, F100000では0.02%である。また, C1000の平均誤差は7.47%, C10000では5.82%, C100000では5.47%である。LP-Pの平均誤差との差は, C1000では2.01%, C10000では0.36%, C100000では0.01%である。

表12において, LP-Sでは平均計算時間が10516秒, 最大計算時間が98191秒である。一方, LP-Pでは平均計算時間が2429秒, 最大計算時間が21092秒であり, LP-Sよりも1/5程度の計算時間である。F10000の平均計算時間は7506秒であり, 400品種の計算時間が長く, 最大で24471秒である。C10000の平均計算時間は5691秒であり, 400品種の計算時間が長く, 最大で180222秒である。

表13, 表14および表15は, 容量レベル16のインスタンスごとの下界値, 誤差および計算時間である。表14において, LP-Pの全体の平均誤差は3.02%であり, 容量レベル8の5.46%と比べると, 誤差は2.44%減少している。なお, LP-Sの全体の平均誤差は3.11%であり, LP-Pよりも0.09%悪化している。これは, 400品種の3つインスタンスで30時間の制限により緩和問題の最適値を算出することができていないためである。なお, 3つの内の1つのインスタンスではほぼ最適値を算出しているが, 30/520/400/F/Tと30/700/400/F/LのインスタンスではLP-P比べてそれぞれ1.92%, 0.91%劣っている。

一方, F1000の平均誤差は4.13%, F10000では3.21%, F100000では3.03%である。LP-Pの平均誤差との差は, F1000では1.11%, F10000では0.19%, F100000では0.01%である。また, C1000の平均誤差は4.33%, C10000では3.22%, C100000では3.02%である。LP-Pの平均誤差との差は, C1000では1.31%, C10000では0.20%, C100000では0.00%である。

表15において, LP-Sでは平均計算時間が20162秒, 最大計算時間が30時間制限の108000秒である。LP-Pの平均計算時間が2184秒, 最大計算時間が35853秒であり, LP-Sよりも平均で1/10程度である。F10000の平均計算時間は13190秒であり, 400品種の計算時間が大きく, 最大で42624秒と10時間を超えている。C10000の平均計算時間は10906秒であり, 400品種の計算時間が大きく, 最大で33651秒と約9時間である。

### 3 おわりに

強い定式化の連続緩和 LP-S, パスフローによる定式化の連続緩和 LP-P, フロー保存式のラグランジュ緩和, 接続式のラグランジュ緩和とともに, 十分な計算時間を使えばほぼ同値の下界値を求めることができた.

計算時間と誤差から見ると, 容量レベル1のインスタンスはLP-Sが優れ, 容量レベル2のインスタンスはLP-Pと接続式のラグランジュ緩和が優れ, 容量レベル8と16ではLP-Pが優れている. LP-Sでは双対実行可能解が得られていれば, 途中で計算を打ち切っても下界値を得ることができる. LP-Pでは列生成を用いて解いているために, 最適値が得られる前に計算を打ち切ると下界値を得ることはできない.

一方, 2つのラグランジュ緩和では, 任意の繰り返し回数で打ち切っても, 下界値を得ることができる. ラグランジュ緩和問題による下界値は劣勾配法の繰り返し回数に依存し, 計算時間は劣勾配法の繰り返し回数に比例する. また, 変更パラメータにも依存する. このため, 誤差と計算時間のバランスをとることやパラメータチューニングが重要となる.

どの緩和問題を用いても容量レベルの小さな問題では誤差, すなわち双対ギャップが大きくなることが分かり, 問題の困難さが認識された. これを解決するためにはさらなる強い定式化の開発が必要である. また, 従来の劣勾配法では多くの繰り返しと計算時間は必要となるので, 劣勾配法によらない最適化法が必要である. しかし, これらの開発は容易なものではない.

また, 一般的なラグランジュ緩和法では下界値を求めると同時に緩和解を用いて上界値を求めるラグランジュヒューリスティクスが用いられる. 今回の研究では, ラグランジュヒューリスティクスを提案はしていない. これは, 近似解法であるMIP近傍探索法と比べて, ラグランジュ緩和から優れた解を導出することが困難であったためである.

本研究では, 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題を対象とし, 2種類のラグランジュ緩和問題とそれらの解法を示した. ベンチマーク問題を用いて, 線形緩和問題と併せてラグランジュ緩和問題について数値実験を行った. 理論を裏付けるように, 強い定式化の線形緩和問題とラグランジュ緩和問題による下界値はほぼ一致した. また, 緩和問題によって計算時間の特性が大きく異なることが明らかになった. なお, 双対ギャップの縮小やラグランジュ緩和からの近似解の導出など多くの課題が存在している.

本研究は科学研究費基盤研究C(課題番号17K01268)による成果の一部である.

### 参考文献

- Crainic, T. G., A. Frangioni, B. Gendron. 2001. Bundle-based relaxation methods for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. *Discrete Applied Mathematics* 112(1-3) 73-99.

表 1: Average Gaps for Categories (%)

COM	LP-W				AVE					
	1	4	8	16						
40	109.34	32.11	15.43	5.96	40.71					
100	364.93	125.53	70.02	35.51	149.00					
200	461.45	143.77	77.68	40.48	180.85					
400	439.84	155.28	89.20	49.95	183.57					
AVE	351.46	116.82	64.62	33.85	141.69					
COM	LP-S				AVE	LP-P				AVE
	1	4	8	16		1	4	8	16	
40	1.39	0.29	0.48	0.40	0.64	1.39	0.29	0.48	0.40	0.64
100	8.74	6.39	4.46	2.25	5.46	8.74	6.39	4.46	2.25	5.46
200	9.98	10.41	7.20	3.79	7.85	9.98	10.41	7.20	3.79	7.85
400	11.73	11.79	9.08	5.65	9.56	11.73	11.79	9.08	5.30	9.48
AVE	8.17	7.45	5.46	3.11	6.05	8.17	7.45	5.46	3.02	6.02
COM	LF				AVE	LC				AVE
	1	4	8	16		1	4	8	16	
40	1.39	0.30	0.48	0.40	0.64	1.39	0.29	0.48	0.40	0.64
100	8.84	6.47	4.50	2.26	5.52	8.83	6.42	4.47	2.26	5.49
200	9.99	10.43	7.22	3.81	7.86	10.00	10.43	7.22	3.81	7.86
400	11.77	11.83	9.11	5.31	9.50	11.77	11.81	9.09	5.31	9.49
AVE	8.21	7.48	5.48	3.03	6.05	8.21	7.46	5.47	3.02	6.04



表 2: Average Computation Times for Categories (Seconds)

COM	LP-W					AVE
	1	4	8	16		
40	0	0	0	1		0
100	1	2	3	6		3
200	1	1	3	7		3
400	2	10	31	56		25
AVE	1	3	10	18		8

  

COM	LP-S					AVE	LP-P				
	1	4	8	16			1	4	8	16	AVE
40	1	0	1	2		1	1	0	0	0	1
100	22	97	267	525		228	534	185	112	76	227
200	13	91	1210	6144		1864	1475	1722	1475	1108	1445
400	145	15455	39270	71459		31582	35128	10357	7824	7280	15147
AVE	46	4037	10516	20162		8690	9584	3165	2429	2184	4341

  

COM	LF					AVE	LC				
	1	4	8	16			1	4	8	16	AVE
40	113	331	587	1038		517	94	259	473	932	439
100	770	2317	4025	6998		3528	670	1794	3246	6257	2992
200	758	2303	3877	6732		3418	674	1819	3195	6063	2938
400	4164	11896	20671	36471		18300	3257	8440	15197	29126	14005
AVE	1494	4337	7506	13190		6632	1209	3169	5691	10906	5244

表 3: Upper Bounds by Gurobi or MIP Heuristic

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	Capacity Level			
	1	4	8	16
20/230/040/V/L	621560	445989	408623	390206
20/230/040/V/T	585739	409195	373571	356018
20/230/040/F/T	1325275	785592	663220	599966
20/230/200/V/L	330924	156600	117240	93851
20/230/200/F/L	600554	248363	176179	136596
20/230/200/V/T	357125	171706	129432	103278
20/230/200/F/T	614208	252999	182268	146093
20/300/040/V/L	685710	471430	428551	403006
20/300/040/F/L	1321018	735101	609755	533218
20/300/040/V/T	727598	511671	464779	447251
20/300/040/F/T	1465541	827145	684366	585616
20/300/200/V/L	307162	139929	105545	83197
20/300/200/F/L	567560	229654	164110	128933
20/300/200/V/T	306206	137114	100499	80820
20/300/200/F/T	533271	219750	154756	119955
30/520/100/V/L	167238	87699	67959	56035
30/520/100/F/L	398913	173090	125336	98181
30/520/100/V/T	162572	86975	67341	56199
30/520/100/F/T	472076	207520	151651	114842
30/520/400/V/L	455020	216733	162520	130983
30/520/400/F/L	671519	323279	236320	181456
30/520/400/V/T	456889	230769	175060	140104
30/520/400/F/T	741297	326717	241033	191674
30/700/100/V/L	156692	80380	61897	50238
30/700/100/F/L	222059	107315	80662	63141
30/700/100/V/T	149221	76875	59870	49694
30/700/100/F/T	223723	110434	82528	64000
30/700/400/V/L	418346	209019	156406	122814
30/700/400/F/L	644891	286267	206726	165582
30/700/400/V/T	391879	196374	149383	119826
30/700/400/F/T	632574	285465	207198	162801

表 4: Lower Bounds of Capacity Level 1

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	377765	621560	621560	619631	621559	621560	621267	621560	621560
20/230/040/V/T	345650	585295	585295	582576	585261	585295	583549	585209	585295
20/230/040/F/T	554324	1308740	1308740	1290502	1305969	1308578	1294264	1306222	1308651
20/230/200/V/L	68797	300712	300712	289198	299373	300678	286246	299087	300667
20/230/200/F/L	98341	544344	544344	529169	541960	544310	524003	541587	544290
20/230/200/V/T	73969	328910	328910	318404	326928	328829	316391	327337	328854
20/230/200/F/T	100632	579928	579928	573929	578469	579894	555812	577806	579848
20/300/040/V/L	385946	685710	685710	682634	685660	685705	683382	685536	685671
20/300/040/F/L	489315	1270359	1270359	1250567	1264236	1270311	1249938	1263791	1270304
20/300/040/V/T	433329	727598	727598	724418	727543	727597	726073	727583	727598
20/300/040/F/T	529593	1403890	1403890	1375769	1396682	1403826	1382822	1395782	1403820
20/300/200/V/L	58857	274916	274916	270567	273744	274897	260880	273289	274875
20/300/200/F/L	87874	507849	507849	499181	505549	507794	481661	504523	507750
20/300/200/V/T	60435	269186	269186	260616	267266	269129	258907	267432	269158
20/300/200/F/T	84332	494915	494915	479283	493253	494892	460221	490421	494664
30/520/100/V/L	43657	154959	154959	151097	153714	154750	148003	153940	154891
30/520/100/F/L	66982	369835	369835	364371	368534	369783	337400	366480	369512
30/520/100/V/T	45419	152605	152605	148155	150911	152224	145581	151754	152553
30/520/100/F/T	76196	426851	426851	418116	423845	426655	392092	421552	426287
30/520/400/V/L	95115	403210	403210	394022	400674	403128	386491	400519	403141
30/520/400/F/L	121333	608777	608777	597199	605631	608674	572449	604573	608604
30/520/400/V/T	97664	419626	419626	409072	417156	419440	392437	417036	419507
30/520/400/F/T	124355	658354	658354	637116	653368	658146	623167	654079	658256
30/700/100/V/L	38952	144707	144707	140235	143072	144484	136881	143705	144633
30/700/100/F/L	45687	204316	204316	200397	203339	204263	188208	202623	204177
30/700/100/V/T	40023	137050	137050	134215	136404	136993	128989	136222	137001
30/700/100/F/T	44552	201202	201202	196809	200083	201127	186705	198994	200913
30/700/400/V/L	78149	366461	366461	357555	363580	366266	349791	363667	366376
30/700/400/F/L	105645	591593	591593	577048	588474	591440	543584	586045	591129
30/700/400/V/T	80143	346424	346424	339520	344526	346383	326498	343756	346323
30/700/400/F/T	107539	560028	560028	545789	556433	559946	522850	555761	559896

表 5: Gaps Bounds of Capacity Level 1 (%)

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	64.54	0.00	0.00	0.31	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00
20/230/040/V/T	69.46	0.08	0.08	0.54	0.08	0.08	0.38	0.09	0.08
20/230/040/F/T	139.08	1.26	1.26	2.69	1.48	1.28	2.40	1.46	1.27
20/230/200/V/L	381.02	10.05	10.05	14.43	10.54	10.06	15.61	10.64	10.06
20/230/200/F/L	510.68	10.33	10.33	13.49	10.81	10.33	14.61	10.89	10.34
20/230/200/V/T	382.81	8.58	8.58	12.16	9.24	8.61	12.87	9.10	8.60
20/230/200/F/T	510.35	5.91	5.91	7.02	6.18	5.92	10.51	6.30	5.93
20/300/040/V/L	77.67	0.00	0.00	0.45	0.01	0.00	0.34	0.03	0.01
20/300/040/F/L	169.97	3.99	3.99	5.63	4.49	3.99	5.69	4.53	3.99
20/300/040/V/T	67.91	0.00	0.00	0.44	0.01	0.00	0.21	0.00	0.00
20/300/040/F/T	176.73	4.39	4.39	6.53	4.93	4.40	5.98	5.00	4.40
20/300/200/V/L	421.88	11.73	11.73	13.53	12.21	11.74	17.74	12.39	11.75
20/300/200/F/L	545.88	11.76	11.76	13.70	12.27	11.77	17.83	12.49	11.78
20/300/200/V/T	406.67	13.75	13.75	17.49	14.57	13.78	18.27	14.50	13.76
20/300/200/F/T	532.35	7.75	7.75	11.26	8.11	7.76	15.87	8.74	7.80
30/520/100/V/L	283.07	7.92	7.92	10.68	8.80	8.07	13.00	8.64	7.97
30/520/100/F/L	495.55	7.86	7.86	9.48	8.24	7.88	18.23	8.85	7.96
30/520/100/V/T	257.94	6.53	6.53	9.73	7.73	6.80	11.67	7.13	6.57
30/520/100/F/T	519.55	10.60	10.60	12.91	11.38	10.65	20.40	11.99	10.74
30/520/400/V/L	378.39	12.85	12.85	15.48	13.56	12.87	17.73	13.61	12.87
30/520/400/F/L	453.45	10.31	10.31	12.44	10.88	10.32	17.31	11.07	10.34
30/520/400/V/T	367.81	8.88	8.88	11.69	9.52	8.93	16.42	9.56	8.91
30/520/400/F/T	496.12	12.60	12.60	16.35	13.46	12.63	18.96	13.33	12.62
30/700/100/V/L	302.27	8.28	8.28	11.74	9.52	8.45	14.47	9.04	8.34
30/700/100/F/L	386.05	8.68	8.68	10.81	9.21	8.71	17.99	9.59	8.76
30/700/100/V/T	272.84	8.88	8.88	11.18	9.40	8.93	15.69	9.54	8.92
30/700/100/F/T	402.16	11.19	11.19	13.68	11.82	11.23	19.83	12.43	11.35
30/700/400/V/L	435.32	14.16	14.16	17.00	15.06	14.22	19.60	15.04	14.18
30/700/400/F/L	510.43	9.01	9.01	11.76	9.59	9.04	18.64	10.04	9.09
30/700/400/V/T	388.97	13.12	13.12	15.42	13.74	13.13	20.02	14.00	13.15
30/700/400/F/T	488.23	12.95	12.95	15.90	13.68	12.97	20.99	13.82	12.98
Average	351.46	8.17	8.17	10.51	8.73	8.21	13.53	8.83	8.21

表 6: Computation Times of Capacity Level 1 (seconds)

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	0	0	0	1	9	92	1	8	77
20/230/040/V/T	0	0	0	1	10	100	1	8	82
20/230/040/F/T	0	1	1	1	10	101	1	9	86
20/230/200/V/L	0	13	693	7	66	658	6	59	575
20/230/200/F/L	1	10	1244	7	69	682	6	60	603
20/230/200/V/T	0	13	696	7	66	655	6	57	572
20/230/200/F/T	0	11	1404	7	65	654	6	60	597
20/300/040/V/L	0	0	0	1	12	119	1	10	97
20/300/040/F/L	0	1	3	1	13	129	1	11	106
20/300/040/V/T	0	0	0	1	13	126	1	10	102
20/300/040/F/T	0	1	3	1	13	126	1	10	105
20/300/200/V/L	1	14	1378	9	88	876	8	77	772
20/300/200/F/L	1	14	2827	9	85	844	8	76	764
20/300/200/V/T	1	12	1085	9	85	852	7	74	742
20/300/200/F/T	1	15	2474	9	84	845	8	77	766
30/520/100/V/L	1	21	129	7	65	647	6	55	548
30/520/100/F/L	1	18	769	7	67	659	6	60	593
30/520/100/V/T	1	19	116	7	66	662	6	56	553
30/520/100/F/T	1	20	1294	7	65	660	6	60	597
30/520/400/V/L	2	94	8955	36	362	3622	29	284	2826
30/520/400/F/L	2	75	37405	36	360	3631	29	288	2885
30/520/400/V/T	2	122	9361	36	355	3561	29	280	2774
30/520/400/F/T	2	132	34330	35	354	3559	29	284	2863
30/700/100/V/L	1	22	216	9	87	872	8	75	746
30/700/100/F/L	1	26	785	9	87	870	8	78	770
30/700/100/V/T	1	25	227	9	89	895	8	76	762
30/700/100/F/T	1	22	737	9	91	891	8	80	789
30/700/400/V/L	3	132	37360	46	463	4677	37	361	3609
30/700/400/F/L	3	157	75717	47	473	4749	38	378	3754
30/700/400/V/T	3	191	24393	47	474	4704	37	364	3625
30/700/400/F/T	3	254	53507	48	473	4809	38	374	3724
Average	1	46	9584	15	149	1494	12	121	1209

表 7: Lower Bounds of Capacity Level 4

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	377766	445880	445880	445807	445877	445880	445844	445880	445880
20/230/040/V/T	345647	409195	409195	409177	409195	409195	409195	409195	409195
20/230/040/F/T	554333	785383	785383	781331	784958	785207	783351	785346	785381
20/230/200/V/L	68800	142338	142338	139211	141611	142312	138734	141617	142324
20/230/200/F/L	98347	219755	219755	215060	218679	219736	214376	218403	219726
20/230/200/V/T	73970	158857	158857	154973	158136	158802	155345	158126	158817
20/230/200/F/T	100641	229281	229281	225884	228337	229253	223136	227976	229246
20/300/040/V/L	385946	471430	471430	471313	471430	471430	471430	471430	471430
20/300/040/F/L	489321	730609	730609	723924	730005	730588	726006	729979	730588
20/300/040/V/T	433328	511351	511351	510828	511340	511351	511329	511329	511351
20/300/040/F/T	529598	816395	816395	809692	815114	816386	813186	815037	816383
20/300/200/V/L	58859	127195	127195	124549	126572	127167	123345	126476	127172
20/300/200/F/L	87877	204466	204466	200623	203464	204446	196368	203011	204439
20/300/200/V/T	60437	127394	127394	122942	126670	127335	123930	126818	127367
20/300/200/F/T	84337	196438	196438	193527	195505	196419	189295	195266	196420
30/520/100/V/L	43657	83355	83355	81554	82938	83288	81621	83092	83349
30/520/100/F/L	66990	159134	159134	156639	158506	159111	151889	158226	159087
30/520/100/V/T	45419	83046	83046	81371	82644	82964	81433	82830	83039
30/520/100/F/T	76204	191628	191628	187541	190324	191388	181006	190286	191524
30/520/400/V/L	95115	198143	198143	193872	197042	198077	193148	197198	198113
30/520/400/F/L	121335	283439	283439	277383	281657	283387	274407	281451	283394
30/520/400/V/T	97665	207483	207483	202468	206232	207402	203108	206361	207462
30/520/400/F/T	124357	294905	294905	288259	293000	294797	284414	293206	294851
30/700/100/V/L	38953	76838	76838	75335	76439	76726	75154	76587	76828
30/700/100/F/L	45689	101127	101127	98883	100693	101092	97338	100598	101095
30/700/100/V/T	40023	73904	73904	72411	73623	73870	71989	73665	73886
30/700/100/F/T	44555	100966	100966	98976	100519	100949	97601	100429	100947
30/700/400/V/L	78148	181676	181676	177069	180348	181630	177317	180363	181653
30/700/400/F/L	105646	256198	256198	250766	254852	256148	245873	254410	256127
30/700/400/V/T	80143	177959	177959	173055	176969	177893	172897	176939	177927
30/700/400/F/T	107540	255404	255404	249491	253926	255330	245440	253785	255365

表 8: Gaps Bounds of Capacity Level 4 (%)

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	18.06	0.02	0.02	0.04	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02
20/230/040/V/T	18.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20/230/040/F/T	41.72	0.03	0.03	0.55	0.08	0.05	0.29	0.03	0.03
20/230/200/V/L	127.62	10.02	10.02	12.49	10.58	10.04	12.88	10.58	10.03
20/230/200/F/L	152.54	13.02	13.02	15.49	13.57	13.03	15.85	13.72	13.03
20/230/200/V/T	132.13	8.09	8.09	10.80	8.58	8.13	10.53	8.59	8.12
20/230/200/F/T	151.39	10.34	10.34	12.00	10.80	10.36	13.38	10.98	10.36
20/300/040/V/L	22.15	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20/300/040/F/L	50.23	0.61	0.61	1.54	0.70	0.62	1.25	0.70	0.62
20/300/040/V/T	18.08	0.06	0.06	0.16	0.06	0.06	0.07	0.07	0.06
20/300/040/F/T	56.18	1.32	1.32	2.16	1.48	1.32	1.72	1.49	1.32
20/300/200/V/L	137.73	10.01	10.01	12.35	10.55	10.04	13.45	10.64	10.03
20/300/200/F/L	161.33	12.32	12.32	14.47	12.87	12.33	16.95	13.12	12.33
20/300/200/V/T	126.87	7.63	7.63	11.53	8.25	7.68	10.64	8.12	7.65
20/300/200/F/T	160.56	11.87	11.87	13.55	12.40	11.88	16.09	12.54	11.88
30/520/100/V/L	100.88	5.21	5.21	7.54	5.74	5.30	7.45	5.54	5.22
30/520/100/F/L	158.38	8.77	8.77	10.50	9.20	8.79	13.96	9.39	8.80
30/520/100/V/T	91.49	4.73	4.73	6.89	5.24	4.83	6.81	5.00	4.74
30/520/100/F/T	172.32	8.29	8.29	10.65	9.04	8.43	14.65	9.06	8.35
30/520/400/V/L	127.86	9.38	9.38	11.79	9.99	9.42	12.21	9.91	9.40
30/520/400/F/L	166.44	14.06	14.06	16.55	14.78	14.08	17.81	14.86	14.07
30/520/400/V/T	136.29	11.22	11.22	13.98	11.90	11.27	13.62	11.83	11.23
30/520/400/F/T	162.73	10.79	10.79	13.34	11.51	10.83	14.87	11.43	10.81
30/700/100/V/L	106.35	4.61	4.61	6.70	5.16	4.76	6.95	4.95	4.62
30/700/100/F/L	134.88	6.12	6.12	8.53	6.58	6.16	10.25	6.68	6.15
30/700/100/V/T	92.08	4.02	4.02	6.17	4.42	4.07	6.79	4.36	4.04
30/700/100/F/T	147.86	9.38	9.38	11.58	9.86	9.40	13.15	9.96	9.40
30/700/400/V/L	167.47	15.05	15.05	18.04	15.90	15.08	17.88	15.89	15.07
30/700/400/F/L	170.97	11.74	11.74	14.16	12.33	11.76	16.43	12.52	11.77
30/700/400/V/T	145.03	10.35	10.35	13.48	10.96	10.39	13.58	10.98	10.37
30/700/400/F/T	165.45	11.77	11.77	14.42	12.42	11.80	16.31	12.48	11.79
Average	116.82	7.45	7.45	9.40	7.90	7.48	10.19	7.92	7.46

表 9: Computation Times of Capacity Level 4 (seconds)

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	0	0	0	3	27	279	2	21	219
20/230/040/V/T	0	0	0	3	25	245	2	23	237
20/230/040/F/T	0	1	0	3	29	300	2	23	224
20/230/200/V/L	1	93	658	19	191	2002	16	156	1543
20/230/200/F/L	2	70	1365	20	197	2054	16	163	1628
20/230/200/V/T	1	57	390	20	194	2009	16	158	1546
20/230/200/F/T	1	98	2374	19	188	1978	16	157	1613
20/300/040/V/L	0	0	0	3	35	357	3	27	261
20/300/040/F/L	0	1	0	4	37	381	3	29	292
20/300/040/V/T	0	0	0	4	36	372	3	29	289
20/300/040/F/T	0	1	0	4	37	383	3	29	291
20/300/200/V/L	1	101	1453	25	250	2597	20	204	2033
20/300/200/F/L	1	107	4263	25	249	2588	20	209	2100
20/300/200/V/T	1	73	577	25	249	2642	20	201	2011
20/300/200/F/T	2	129	2697	25	248	2555	21	205	2075
30/520/100/V/L	1	57	16	19	189	1986	15	153	1513
30/520/100/F/L	1	98	410	19	190	1978	16	160	1567
30/520/100/V/T	2	34	10	19	195	2033	15	154	1543
30/520/100/F/T	1	104	722	19	191	1981	16	157	1587
30/520/400/V/L	8	9882	2142	101	1012	10587	74	732	7221
30/520/400/F/L	8	21372	14247	104	1009	10623	75	764	7611
30/520/400/V/T	8	1855	2053	101	1003	10388	73	734	7287
30/520/400/F/T	8	1784	9777	100	997	10354	75	733	7431
30/700/100/V/L	2	55	16	25	255	2608	20	202	2007
30/700/100/F/L	2	145	169	26	254	2623	21	203	2041
30/700/100/V/T	2	146	23	26	254	2651	21	205	2007
30/700/100/F/T	2	139	112	26	254	2678	21	211	2087
30/700/400/V/L	11	6744	5761	133	1309	13357	97	961	9589
30/700/400/F/L	11	6738	25383	131	1302	13224	96	966	9521
30/700/400/V/T	12	6001	5303	131	1300	13331	96	948	9282
30/700/400/F/T	11	69261	18190	135	1332	13304	99	985	9577
Average	3	4037	3165	42	421	4337	32	319	3169



表 10: Lower Bounds of Capacity Level 8

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	377764	408473	408473	408441	408466	408473	408451	408470	408473
20/230/040/V/T	345644	373343	373343	373049	373327	373343	373106	373328	373343
20/230/040/F/T	554344	659439	659439	658677	659120	659437	658814	659098	659436
20/230/200/V/L	68804	109742	109742	107775	109395	109729	107077	109313	109723
20/230/200/F/L	98351	160816	160816	157729	160133	160795	156174	159924	160782
20/230/200/V/T	73972	123136	123136	120469	122684	123092	120598	122761	123118
20/230/200/F/T	100651	170171	170171	167109	169622	170145	165112	169376	170126
20/300/040/V/L	385946	427947	427947	427895	427918	427947	427917	427938	427947
20/300/040/F/L	489325	601757	601757	599966	600865	601749	599620	600734	601748
20/300/040/V/T	433327	464571	464571	464543	464569	464571	464567	464569	464571
20/300/040/F/T	529606	676624	676624	673814	675665	676617	674875	675708	676617
20/300/200/V/L	58862	97939	97939	96111	97597	97927	95729	97537	97932
20/300/200/F/L	87884	149833	149833	147225	149203	149803	145060	148943	149792
20/300/200/V/T	60439	97309	97309	94399	96952	97261	95148	96975	97278
20/300/200/F/T	84343	142742	142742	140386	142224	142733	138328	141983	142715
30/520/100/V/L	43660	66195	66195	64936	65978	66180	65340	66076	66191
30/520/100/F/L	67001	116765	116765	114594	116343	116741	113308	116262	116738
30/520/100/V/T	45421	66399	66399	65202	66140	66313	65536	66298	66390
30/520/100/F/T	76210	141029	141029	138200	140292	140966	135888	140243	141001
30/520/400/V/L	95114	153745	153745	150944	153182	153697	150842	153242	153724
30/520/400/F/L	121334	213771	213771	209709	212715	213741	208374	212599	213748
30/520/400/V/T	97664	161244	161244	157963	160542	161221	158746	160549	161232
30/520/400/F/T	124358	219547	219547	215022	218421	219477	214117	218383	219516
30/700/100/V/L	38955	60158	60158	59337	60044	60151	59570	60053	60152
30/700/100/F/L	45694	76579	76579	75276	76332	76566	74772	76319	76567
30/700/100/V/T	40023	58583	58583	57582	58422	58566	57734	58496	58580
30/700/100/F/T	44561	77630	77630	76307	77363	77623	75932	77324	77621
30/700/400/V/L	78147	140359	140359	137169	139528	140326	137749	139568	140348
30/700/400/F/L	105648	188095	188095	183678	187128	188056	181900	186920	188051
30/700/400/V/T	80141	138934	138934	135141	138196	138869	136091	138345	138916
30/700/400/F/T	107541	189855	189855	186109	188849	189775	184498	188798	189805

表 11: Gaps Bounds of Capacity Level 8(%)

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	8.17	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
20/230/040/V/T	8.08	0.06	0.06	0.14	0.07	0.06	0.12	0.07	0.06
20/230/040/F/T	19.64	0.57	0.57	0.69	0.62	0.57	0.67	0.63	0.57
20/230/200/V/L	70.40	6.83	6.83	8.78	7.17	6.84	9.49	7.25	6.85
20/230/200/F/L	79.13	9.55	9.55	11.70	10.02	9.57	12.81	10.16	9.58
20/230/200/V/T	74.97	5.11	5.11	7.44	5.50	5.15	7.32	5.43	5.13
20/230/200/F/T	81.09	7.11	7.11	9.07	7.46	7.13	10.39	7.61	7.14
20/300/040/V/L	11.04	0.14	0.14	0.15	0.15	0.14	0.15	0.14	0.14
20/300/040/F/L	24.61	1.33	1.33	1.63	1.48	1.33	1.69	1.50	1.33
20/300/040/V/T	7.26	0.04	0.04	0.05	0.05	0.04	0.05	0.05	0.04
20/300/040/F/T	29.22	1.14	1.14	1.57	1.29	1.15	1.41	1.28	1.15
20/300/200/V/L	79.31	7.77	7.77	9.82	8.14	7.78	10.25	8.21	7.77
20/300/200/F/L	86.73	9.53	9.53	11.47	9.99	9.55	13.13	10.18	9.56
20/300/200/V/T	66.28	3.28	3.28	6.46	3.66	3.33	5.62	3.63	3.31
20/300/200/F/T	83.48	8.42	8.42	10.24	8.81	8.42	11.88	9.00	8.44
30/520/100/V/L	55.65	2.66	2.66	4.66	3.00	2.69	4.01	2.85	2.67
30/520/100/F/L	87.07	7.34	7.34	9.37	7.73	7.36	10.62	7.80	7.37
30/520/100/V/T	48.26	1.42	1.42	3.28	1.82	1.55	2.75	1.57	1.43
30/520/100/F/T	98.99	7.53	7.53	9.73	8.10	7.58	11.60	8.13	7.55
30/520/400/V/L	70.87	5.71	5.71	7.67	6.10	5.74	7.74	6.05	5.72
30/520/400/F/L	94.77	10.55	10.55	12.69	11.10	10.56	13.41	11.16	10.56
30/520/400/V/T	79.25	8.57	8.57	10.82	9.04	8.58	10.28	9.04	8.58
30/520/400/F/T	93.82	9.79	9.79	12.10	10.35	9.82	12.57	10.37	9.80
30/700/100/V/L	58.90	2.89	2.89	4.31	3.09	2.90	3.91	3.07	2.90
30/700/100/F/L	76.53	5.33	5.33	7.16	5.67	5.35	7.88	5.69	5.35
30/700/100/V/T	49.59	2.20	2.20	3.97	2.48	2.23	3.70	2.35	2.20
30/700/100/F/T	85.20	6.31	6.31	8.15	6.68	6.32	8.69	6.73	6.32
30/700/400/V/L	100.14	11.43	11.43	14.02	12.10	11.46	13.54	12.06	11.44
30/700/400/F/L	95.68	9.91	9.91	12.55	10.47	9.93	13.65	10.60	9.93
30/700/400/V/T	86.40	7.52	7.52	10.54	8.09	7.57	9.77	7.98	7.53
30/700/400/F/T	92.67	9.14	9.14	11.33	9.72	9.18	12.30	9.75	9.16
Average	64.62	5.46	5.46	7.15	5.81	5.48	7.47	5.82	5.47

表 12: Computation Times of Capacity Level 8 (seconds)

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	0	0	0	5	49	483	4	39	394
20/230/040/V/T	0	1	0	5	52	517	4	42	413
20/230/040/F/T	0	1	0	5	51	508	4	41	416
20/230/200/V/L	2	1033	602	33	333	3322	27	271	2723
20/230/200/F/L	2	1246	1633	35	345	3442	29	290	2892
20/230/200/V/T	2	1209	213	35	349	3469	28	282	2814
20/230/200/F/T	2	1066	2119	33	336	3330	28	278	2828
20/300/040/V/L	0	1	0	6	62	625	5	50	502
20/300/040/F/L	0	1	0	7	65	653	5	54	529
20/300/040/V/T	0	1	0	6	65	650	5	53	522
20/300/040/F/T	0	1	0	7	66	674	5	54	533
20/300/200/V/L	4	1203	956	44	438	4433	36	356	3584
20/300/200/F/L	3	1654	3397	44	440	4419	36	368	3650
20/300/200/V/T	3	925	315	44	441	4313	35	347	3495
20/300/200/F/T	3	1340	2561	43	425	4290	36	354	3575
30/520/100/V/L	3	59	4	34	342	3410	28	276	2747
30/520/100/F/L	4	369	341	35	340	3420	29	284	2834
30/520/100/V/T	2	40	3	35	355	3487	28	277	2797
30/520/100/F/T	2	392	423	34	342	3421	29	279	2790
30/520/400/V/L	22	21796	1180	175	1736	17240	128	1282	128013
30/520/400/F/L	27	98191	9100	184	1769	17914	135	1321	132877
30/520/400/V/T	21	18073	1210	183	1817	18170	130	1307	130494
30/520/400/F/T	26	67579	10336	172	1695	17039	130	1273	128275
30/700/100/V/L	3	47	5	47	450	4646	36	358	3606
30/700/100/F/L	2	528	55	45	450	4509	37	368	3687
30/700/100/V/T	3	160	9	46	463	4708	37	367	3732
30/700/100/F/T	3	546	55	46	458	4600	38	372	3777
30/700/400/V/L	38	28277	3781	236	2362	23529	173	1703	171252
30/700/400/F/L	41	27069	21092	247	2408	24471	175	1751	180222
30/700/400/V/T	36	27474	3181	228	2251	22693	168	1675	167312
30/700/400/F/T	39	25700	12713	243	2476	24307	178	1755	177313
Average	10	10516	2429	76	749	7506	57	565	5691

表 13: Lower Bounds of Capacity Level 16

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	377766	389978	389978	389681	389966	389977	389679	389965	389978
20/230/040/V/T	345638	355106	355106	354908	355034	355105	354947	355033	355105
20/230/040/F/T	554366	597330	597330	596421	597005	597310	596544	597054	597328
20/230/200/V/L	68822	90942	90942	89887	90813	90939	89517	90772	90933
20/230/200/F/L	98373	131405	131405	129667	131153	131399	128455	130987	131382
20/230/200/V/T	73981	100480	100480	99063	100270	100456	99027	100311	100473
20/230/200/F/T	100672	139587	139587	137734	139317	139584	136543	139161	139575
20/300/040/V/L	385944	402390	402390	402329	402378	402390	402335	402376	402390
20/300/040/F/L	489346	528197	528197	527347	527815	528193	527310	527707	528192
20/300/040/V/T	433329	445571	445571	445345	445442	445570	445251	445416	445570
20/300/040/F/T	529643	582434	582434	581907	582191	582432	581891	582201	582432
20/300/200/V/L	58869	80366	80366	79376	80235	80364	79062	80189	80359
20/300/200/F/L	87898	122030	122030	120543	121734	122025	119120	121638	122018
20/300/200/V/T	60443	79259	79259	77992	79078	79232	78290	79119	79248
20/300/200/F/T	84359	114666	114666	113320	114381	114640	112146	114309	114648
30/520/100/V/L	43667	55153	55153	54576	55061	55138	54853	55105	55153
30/520/100/F/L	67022	93782	93782	92345	93568	93778	91731	93499	93771
30/520/100/V/T	45422	55629	55629	55139	55537	55617	55339	55588	55627
30/520/100/F/T	76232	110555	110555	109037	110199	110509	107836	110181	110530
30/520/400/V/L	95113	127525	127525	126038	127284	127506	126105	127301	127513
30/520/400/F/L	121338	173936	173936	171295	173473	173908	170323	173382	173898
30/520/400/V/T	97666	133918	133918	132281	133582	133902	132475	133597	133912
30/520/400/F/T	124363	177308	180524	177654	179956	180507	177033	179914	180505
30/700/100/V/L	38956	49697	49697	49337	49659	49694	49487	49662	49694
30/700/100/F/L	45699	61669	61669	60867	61554	61660	60736	61563	61661
30/700/100/V/T	40024	49208	49208	48705	49154	49203	48850	49177	49207
30/700/100/F/T	44568	62548	62548	61968	62474	62545	61831	62450	62540
30/700/400/V/L	78144	115839	115839	113949	115414	115808	114214	115475	115833
30/700/400/F/L	105648	151779	153063	149833	152427	153050	149637	152384	153049
30/700/400/V/T	80138	114718	114718	112210	114292	114685	113087	114420	114709
30/700/400/F/T	107544	153747	153748	151456	153273	153718	150352	153197	153729

表 14: Gaps Bounds of Capacity Level 16 (%)

Node/Arc/Commdity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	3.29	0.06	0.06	0.13	0.06	0.06	0.14	0.06	0.06
20/230/040/V/T	3.00	0.26	0.26	0.31	0.28	0.26	0.30	0.28	0.26
20/230/040/F/T	8.23	0.44	0.44	0.59	0.50	0.44	0.57	0.49	0.44
20/230/200/V/L	36.37	3.20	3.20	4.41	3.34	3.20	4.84	3.39	3.21
20/230/200/F/L	38.86	3.95	3.95	5.34	4.15	3.96	6.34	4.28	3.97
20/230/200/V/T	39.60	2.78	2.78	4.25	3.00	2.81	4.29	2.96	2.79
20/230/200/F/T	45.12	4.66	4.66	6.07	4.86	4.66	6.99	4.98	4.67
20/300/040/V/L	4.42	0.15	0.15	0.17	0.16	0.15	0.17	0.16	0.15
20/300/040/F/L	8.97	0.95	0.95	1.11	1.02	0.95	1.12	1.04	0.95
20/300/040/V/T	3.21	0.38	0.38	0.43	0.41	0.38	0.45	0.41	0.38
20/300/040/F/T	10.57	0.55	0.55	0.64	0.59	0.55	0.64	0.59	0.55
20/300/200/V/L	41.32	3.52	3.52	4.81	3.69	3.53	5.23	3.75	3.53
20/300/200/F/L	46.69	5.66	5.66	6.96	5.91	5.66	8.24	6.00	5.67
20/300/200/V/T	33.71	1.97	1.97	3.63	2.20	2.00	3.23	2.15	1.98
20/300/200/F/T	42.20	4.61	4.61	5.86	4.87	4.64	6.96	4.94	4.63
30/520/100/V/L	28.32	1.60	1.60	2.67	1.77	1.63	2.15	1.69	1.60
30/520/100/F/L	46.49	4.69	4.69	6.32	4.93	4.69	7.03	5.01	4.70
30/520/100/V/T	23.73	1.02	1.02	1.92	1.19	1.05	1.55	1.10	1.03
30/520/100/F/T	50.65	3.88	3.88	5.32	4.21	3.92	6.50	4.23	3.90
30/520/400/V/L	37.71	2.71	2.71	3.92	2.91	2.73	3.87	2.89	2.72
30/520/400/F/L	49.55	4.32	4.32	5.93	4.60	4.34	6.54	4.66	4.35
30/520/400/V/T	43.45	4.62	4.62	5.91	4.88	4.63	5.76	4.87	4.62
30/520/400/F/T	54.12	8.10	6.18	7.89	6.51	6.19	8.27	6.54	6.19
30/700/100/V/L	28.96	1.09	1.09	1.83	1.16	1.09	1.52	1.16	1.09
30/700/100/F/L	38.17	2.39	2.39	3.74	2.58	2.40	3.96	2.56	2.40
30/700/100/V/T	24.16	0.99	0.99	2.03	1.10	1.00	1.73	1.05	0.99
30/700/100/F/T	43.60	2.32	2.32	3.28	2.44	2.33	3.51	2.48	2.33
30/700/400/V/L	57.16	6.02	6.02	7.78	6.41	6.05	7.53	6.35	6.03
30/700/400/F/L	56.73	9.09	8.18	10.51	8.63	8.19	10.66	8.66	8.19
30/700/400/V/T	49.52	4.45	4.45	6.79	4.84	4.48	5.96	4.72	4.46
30/700/400/F/T	51.38	5.89	5.89	7.49	6.22	5.91	8.28	6.27	5.90
Average	33.85	3.11	3.02	4.13	3.21	3.03	4.33	3.22	3.02

表 15: Computation Times of Capacity Level 16 (seconds)

Node/Arc/Commodity /Cost/Capacity	LP-W	LP-S	LP-P	LF			LC		
				F1000	F10000	F100000	C1000	C10000	C100000
20/230/040/V/L	1	1	0	9	86	861	8	76	748
20/230/040/V/T	1	1	0	9	90	916	9	84	851
20/230/040/F/T	1	2	0	9	88	889	8	81	811
20/230/200/V/L	5	5209	288	59	571	5874	53	524	5229
20/230/200/F/L	6	8311	1077	60	597	6062	56	554	5546
20/230/200/V/T	6	3813	88	59	594	5921	53	534	5340
20/230/200/F/T	6	3579	2272	58	596	5867	54	534	5184
20/300/040/V/L	1	1	0	11	114	1093	10	99	993
20/300/040/F/L	1	2	0	12	115	1174	11	107	1070
20/300/040/V/T	1	2	0	11	118	1179	10	105	1044
20/300/040/F/T	1	2	0	12	115	1155	10	101	1011
20/300/200/V/L	8	9640	575	76	755	7547	67	681	6814
20/300/200/F/L	7	7978	2323	75	750	7451	68	690	6895
20/300/200/V/T	8	3199	160	76	748	7546	68	680	6813
20/300/200/F/T	7	7421	2080	76	750	7586	67	689	6685
30/520/100/V/L	6	77	2	59	599	5954	54	558	5392
30/520/100/F/L	6	1120	343	60	592	5820	55	532	5439
30/520/100/V/T	5	63	2	59	595	6222	56	537	5409
30/520/100/F/T	5	1162	217	59	582	6047	55	528	5320
30/520/400/V/L	44	50535	456	319	3105	31755	258	2524	25203
30/520/400/F/L	48	22417	4613	312	3107	31511	252	2484	25188
30/520/400/V/T	47	29073	537	309	3011	30717	251	2481	24559
30/520/400/F/T	48	108000	4856	306	3002	30183	250	2500	24700
30/700/100/V/L	8	82	2	79	758	7937	71	708	6958
30/700/100/F/L	5	1050	24	78	797	7936	70	715	7133
30/700/100/V/T	8	96	3	79	796	8032	73	726	7158
30/700/100/F/T	8	547	19	78	783	8037	73	725	7250
30/700/400/V/L	61	96762	1383	402	4090	41156	331	3316	33151
30/700/400/F/L	69	108000	35853	408	4079	41713	336	3320	33621
30/700/400/V/T	64	48883	1273	402	4188	42108	334	3278	32934
30/700/400/F/T	67	108000	9274	420	4181	42624	329	3275	33651
Average	18	20162	2184	130	1302	13190	110	1089	10906

- Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2003. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science* **49** 1268–1273.
- Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2007. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research* **55** 146–157.
- Frangionia, A., B. Gendron. 2009. 0–1 reformulations of the multicommodity capacitated network design problem. *Discrete Applied Mathematics* **157**(6) 1229–1241.
- Gendron, B., L. Gouveia. 2017. Reformulations by discretization for piecewise linear integer multicommodity network flow problems. *Transportation Science* **51**(2) 629–649.
- Held, M., P. Wolfe, H. P. Crowder. 1974. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming* **6**(1) 62–88.
- 片山直登. 2020a. 整数アセットを考慮したネットワーク設計問題の近似解法. 流通経済大学流通情報学部紀要 **25**(1) 31–60.
- 片山直登. 2020b. 整数アセット・アセットバランス・非分割・入木・ホップ数を考慮したネットワーク設計モデル. 流通経済大学流通情報学部紀要 **24**(2) 1–32.