

区分的線形費用と階段状費用を考慮した多品種流 ネットワークフロー問題の近似解法

Heuristics for Multicommodity Network Flow Problem with Piecewise Linear and Staircasing Costs

片山 直登
流通経済大学 流通情報学部

2019年9月20日

1 はじめに

ロジスティクスや通信などのネットワークでは、費用が最小となる多品種のモノが移動する経路を求めることが必要であり、このような問題はネットワークフロー問題とよばれている。ここで、始点と終点が異なるモノを異なる一つの品種と定義し、多品種は始点と終点が異なるモノが複数組存在することを表す。ネットワーク上のアークに対する固定費用を考慮する問題はネットワーク設計問題とよばれ、これまで多くの研究が行われている (Magnanti and Wong 1984, Wong 1984, 1985, Minoux 1989)。

物流分野においては、トラック輸送などによる宅配便、混載便、貸切便や航空輸送、船舶輸送など様々な輸送手段が存在し、利用者は費用、時間やサービスなどを考慮して輸送手段を選択する。費用最小化を目的とする場合には、サービス基準を満たす輸送手段から費用が最小となる輸送手段を選択することになる。

特定の地点間の輸送路において、選択する輸送手段によって異なる固定費用と変動費用が発生する。固定費用は当該輸送手段を選択したときに生じる固定的な費用であり、変動費用は輸送量であるフロー量に比例して発生する費用である。このような費用が固定費用と変動費用で表すことができる複数の輸送手段からの選択を考慮した問題は、固定費用をフロー費用の一部と考えると、フロー費用が区分的線形である多品種流ネットワークフロー問題 (*PMF*) として表現することができる。アークは特定の地点間の輸送路であり、区分はアーク上で特定の輸送手段が費用最小となるフローの範囲である。

一方、対象によっては固定費用のみで変動費用が発生しない場合があり、このような問題はフロー費用が階段状となるため、フロー費用が階段状である多品種流ネットワークフロー問題 (*SMF*) として表現することができる。*SMF* は変動費用が0である *PMF* であり、*PMF* に含まれる問題である。しかし、フロー費用が

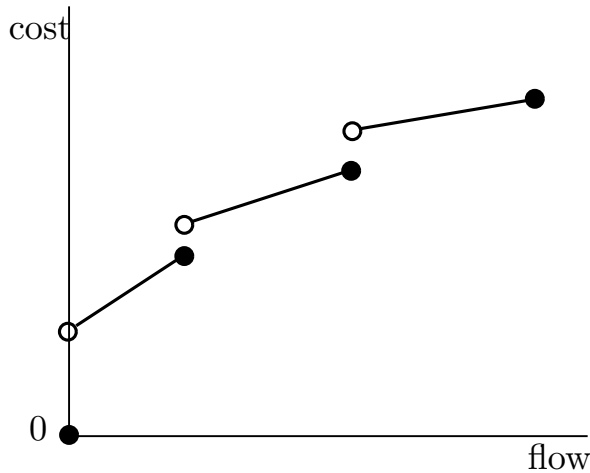


図 1: Piecewise Linear Cost Function

階段上である問題は、変動費用を含む問題と比較して最適解を求めることが難しい問題となるため、本研究では区別して扱うことにする。

PMF の単一の品種モデルに対して、Kim and Pardalos (2000a,b)はスロープスケールリング法を示し、Kim et al. (2006)はスロープスケールリングとタブー探索法を開発している。Croxtton et al. (2003)は物流センターにおける積替えモデルを扱い、Muriel and Munshi (2004)は線形緩和法を提案している。Croxtton et al. (2007)は、3種類の定式化と丸めヒューリスティック法を示している。この解法は、閾値によって一部の変数を固定した問題を分枝限定法を用いて解く方法である。Gendron and Gouveia (2016)は、フロー量が整数値をもつ問題に対して離散化による新たな定式化と妥当な不等式を示し、ラグランジュ緩和とラグランジュヒューリスティクスを開発している。Fortz et al. (2017)は、費用関数が凸関数である単一品種の非分割フロー問題に対する厳密解法と多品種に対する近似解法を示し、これらを凹費用関数をもつ非分割フロー問題に対する数値例にも適用している。Katayama (2017)は、容量スケールリング法、列生成法および局所分枝法を組み合わせた解法を開発している。

本研究では、区分的線形費用を考慮した多品種流ネットワークフロー問題 PMF と階段状費用を考慮した多品種流ネットワークフロー問題 SMF に対して、容量スケールリング法、制限付きの分枝限定法およびMIP近傍探索法を組合せた近似解法を提案し、数値実験により提案した解法の有効性を示す。

2 問題の定式化

ノード集合を N 、アーク集合を A 、需要集合を K 、区分集合を S とし、有向ネットワーク $G = (N, A, K, S)$ が与えられたときに、フロー費用の合計を最小にするような多品種のフローを求めることを考える。

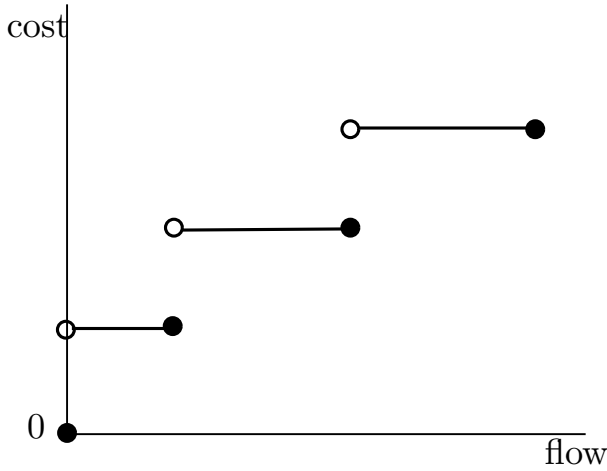


図 2: Staircasing Cost Function

区分はフロー費用が線形である範囲であり，アーク (i, j) に対する区分集合を $S_{ij} = \{1, 2, \dots, |S_{ij}|\}$ と定義する．アーク (i, j) 上の区分 s に対して，フロー費用関数はフロー量に比例する区分変動フロー費用 $c_{ij}^s (\geq 0)$ とフローの有無により生じる固定費用である区分固定フロー費用 $f_{ij}^s (\geq 0)$ で構成される．アーク (i, j) において，フロー量を X としたとき， X が区分 s の範囲内であれば，区分 s のフロー費用は $c_{ij}^s X + f_{ij}^s$ となる．

アーク (i, j) 上の区分 s の下限値を C_{ij}^{s-1} とし，上限値を C_{ij}^s とする．区分の上限値は， $0 = C_{ij}^0 \leq \dots \leq C_{ij}^{s-1} \leq C_{ij}^s \leq \dots \leq C_{ij}^{|S_{ij}|}$ を満たすものとする．区分の境界において，必ずしも連続である必要はないが，下方半連続で非減少な関数とする．図 1 に区分的線形費用関数の例を示す．特に，区分変動フロー費用が 0 である場合，図 2 に示すようにフロー費用は階段状となる．

全体のパス集合を P ，品種 k の取りうるパスの集合を P^k とし，品種 k の需要量を d^k とする．パス p 上を流れる品種 k のフロー量を表す連続変数をパスフロー変数とよび， z_k^p とする．アーク (i, j) 上の区分 s にある品種 k のフロー量を表す連続変数を区分品種フロー変数とよび， u_{ij}^{ks} とする．アーク (i, j) 上の区分 s のフローを区分フローとよび，区分フロー量は区分品種フロー量の合計 $\sum_{k \in K} u_{ij}^{ks}$ となる．区分フローおよび区分品種フローは，区分フロー量が区分 s の上限値と下限値の範囲内にあるときのみに存在する．

アーク上の区分 s の区分フロー量が区分 s の上限値と下限値の間にある場合に 1，そうでない場合に 0 である 0-1 変数である区分デザイン変数を y_{ij}^s とする．また，アーク (i, j) がパス p に含まれる場合に 1，そうでない場合に 0 である定数を δ_{ij}^p とする．

このとき，アーク集合 A とパス集合 P が与えられたときに，PMF のパスフローを用いた定式化 $PMFP(A, P)$ は次のように表すことができる．

(PMFP(A, P))

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left(c_{ij}^s \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} + f_{ij}^s y_{ij}^s \right) \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K, \quad (2)$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$C_{ij}^{s-1} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} \leq C_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (6)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, k \in K, \quad (7)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (8)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (9)$$

目的関数である (1) 式は区分変動フロー費用と区分固定フロー費用の合計である総フロー費用であり、これを最小化する。(2) 式はフロー保存式であり、品種 k のパスフロー量の合計が品種 k の需要量に等しいことを表す。(3) 式は、アーク (i, j) 上の品種 k について、パスフロー量の合計と区分品種フロー量の合計が等しいことを表すフロー関係式である。(4) 式は区分の範囲の制約であり、区分 s の区分フロー量が当該区分の下限値と上限値の間にある場合に限り $y_{ij}^s = 1$ で区分フローが存在し、そうでないとき場合には $y_{ij}^s = 0$ かつ区分フロー量は 0 であることを表す。この式はネットワーク設計問題における容量制約式に対応する。(5) 式は強制制約式である。これは、アーク (i, j) における区分 s の区分品種フロー量は、 $y_{ij}^s = 1$ の場合には各品種の需要量までとなり、 $y_{ij}^s = 0$ である場合に 0 であることを表す。(6) 式は区分選択制約であり、アーク (i, j) の区分 s において、1 の値をとる区分デザイン変数 y_{ij}^s は高々 1 つであることを表す。(7) 式と (8) 式は変数の非負条件、(9) 式は変数の 0-1 条件を表す。

一方, アーク (i, j) 上の品種 k のフロー量を表す連続変数であるアークフロー変数を x_{ij}^k とし, N_n^+ をノード n から出るアークに接続するノードの集合, N_n^- をノード n に入るアークに接続するノードの集合とする. また, 品種 k の起点を O^k , 終点を D^k とする. このとき, PMF のアークフローを用いた定式化 $PMFA$ は次のように表すことができる.

($PMFA$)

$$\Phi = \min \sum_{(i,j) \in A} \left(\sum_{k \in K} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{s \in S_{ij}} f_{ij}^s y_{ij}^s \right) \quad (10)$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} x_{in}^k - \sum_{j \in N_n^-} x_{nj}^k = \begin{cases} -d^k & \text{if } n = O^k \\ d^k & \text{if } n = D^k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall n \in N, k \in K, \quad (11)$$

$$x_{ij}^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (12)$$

$$C_{ij}^{s-1} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} \leq C_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (14)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (15)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (16)$$

$$y_{ij}^s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (17)$$

目的関数である (10) 式は総費用であり, Φ は $PMFA$ の最適値である. (11) 式はフロー保存式であり, 品種 k , ノード n におけるノード n から出るフロー量の合計とノード n に入るフロー量の合計の関係を表す. (12) 式は, アーク (i, j) 上の品種 k におけるアークフロー量と区分品種フロー量の関係を表す. (15) 式は, 変数の非負条件である.

なお, ここでは強制制約式である (5) 式を省いているが, 一般的に (5) 式を加えた $PMFA$ は強い定式化となり, 良い解や下界値を提供することができる. しか

し、計算時間が限られている場合には、計算時間内で適切な実行可能解を算出できない場合がある。

一方、階段状費用をもつ多品種流ネットワークフロー *SMP* に対するパスフローを用いた定式化 *SMFP*、およびアークフローを用いた定式化 *SMFP* では区分変動フロー費用が0であるため、目的関数はともに次のようになる。

(*SMFP*(A, P)) and (*SMPA*)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} f_{ij}^s y_{ij}^s \quad (18)$$

3 容量スケールリング法

容量スケールリング法は、容量制約をもつネットワーク問題の線形緩和問題を解き、解とスケールリングパラメータに従ってアーク容量を現在のフロー量にあわせて変化させ、0-1変数の0または1への収束解を導出するものである。容量スケールリングでは、少ない繰り返し回数で多くの0-1変数が0に収束することが知られている。

PMFP や *SMFP* はアーク上の区分に対する数多くの0-1変数を含む最適化問題であり、小規模な問題以外では最適解または適切な近似解を直接的に算出することが困難が問題である。そこで、容量スケールリング法を用いて、適切な近似解に含まれるであろう区分デザイン変数を選定し、その後、選定された区分デザイン変数の情報を用いて近似解法を実施する。本研究では、パスフローによる定式化である *PMFP* (または *SMFP*) に対して、Katayama (2017) が提案している容量スケールリング法を適用する。

PMFP や *SMFP* では0-1変数は区分デザイン変数であり、*PMFP* や *SMFP* における容量はアーク容量ではなく各区分の上限値となる。そこで、区分の上限値に対して容量スケールリングを適用する。同一のアーク上には複数の容量が存在することになるので、同一アーク上の区分の上限値と下限値が逆転しないようにスケールリングする必要がある。

容量スケールリング法では、区分の上限値を変化させながら、*PMFP* の線形緩和問題を繰り返し解く。現在の区分の上限値を \tilde{C} とし、 $\tilde{C} := C$ とする。区分の上限値 \tilde{C} が与えられたときの *PMFP* の線形緩和問題を $LR(\tilde{C})$ とすると、 $LR(\tilde{C})$ は次のようになる。

($LR(\tilde{C})$)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left(c_{ij}^s \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} + f_{ij}^s y_{ij}^s \right) \quad (19)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K, \quad (20)$$

$$\sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A, \quad (21)$$

$$\tilde{C}_{ij}^{s-1} y_{ij}^s \leq \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} \leq \tilde{C}_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (22)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^s \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (23)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} \frac{\tilde{C}_{ij}^s}{C_{ij}^s} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (24)$$

$$\frac{\tilde{C}_{ij}^s}{C_{ij}^s} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (25)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, k \in K, \quad (26)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall k \in K, s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (27)$$

$$y_{ij}^s \geq 0 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (28)$$

$LR(\tilde{C})$ における区分デザイン変数の最適解を \bar{y} とする．各区分の下限值と上限値が $\tilde{C}_{ij}^{s-1} \leq \tilde{C}_{ij}^s$ の関係を満たす必要があるため，現在の上限値と当該アークにおける区分解の最大値を用いて，次のように上限値を更新する．

$$\tilde{C}_{ij}^s := \alpha \tilde{C}_{ij}^s \max_{h \in S_{ij}} \bar{y}_{ij}^h + (1 - \alpha) \tilde{C}_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (29)$$

ここで， $\max_{h \in S_{ij}} \bar{y}_{ij}^h$ は，アーク (i, j) 上の区分デザイン変数解の中の最大値であり， $\alpha (0 < \alpha < 1)$ はスケーリングパラメータである．この更新式では，スケーリングにより同一アーク内の区分の上限値を定数倍することになるため，常に $\tilde{C}_{ij}^{s-1} \leq \tilde{C}_{ij}^s$ の関係を維持することができる．

0 に未収束の区分デザイン変数の数がある程度の数となったときに，容量スケーリング法を停止し，続く近似解法に移行する．なお，収束判定は当該回における解のみで判断せず，複数回の平均値を用いることにする．ここでは，次のように指数平滑法を用いて，区分デザイン変数値の推定値 \hat{y} を求め， \hat{y} の値により収束の判断を行う．

$$\hat{y}_{ij}^s := \beta \bar{y}_{ij}^s + (1 - \beta) \hat{y}_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (30)$$

ここで， $\beta (0 < \beta < 1)$ は平滑化係数である．

容量スケーリングは少なくとも ITE_{min} 回は繰り返すものとし，0 に収束していない区分デザイン変数の合計が終了判定基準 γ 以下になった場合に容量スケーリングは終了する．もし， γ 個以下にならない場合，容量スケーリングは ITE_{max} 回で終了する．なお， $\hat{y}_{ij}^s < \epsilon$ となった場合，0 に収束と判定する．ここで， $\epsilon (0 < \epsilon < 0.5)$ は収束判定基準である．

容量スケーリング法のアルゴリズムを Algorithm1 に示す．

4 列生成法と行生成法

容量スケーリング法では，線形計画問題 $LR(\tilde{C})$ を反復して解く必要がある． $LR(\tilde{C})$ は指数関数的な数のパスフロー変数を含み，またフロー関係式である (3) 式と強制制約式である (5) 式の数 $O(|K||A|)$ 個も存在する．したがって，大規模な問題では，すべての変数と制約式を明示的に考慮することは得策ではない．そこで，パスフロー変数と区分品種フロー変数に対して列生成法を適用し，フロー関係式と強制制約式に対して列生成法を適用する (Katayama 2017)．

実行可能なパスの部分集合を \tilde{P} とし，品種 k についての実行可能なパスの部分集合を \tilde{P}^k とする．また， \tilde{P}^k に含まれる品種 k のパスに含まれるアーク集合を \tilde{A}^k とし， $\tilde{A} = (\tilde{A}^k)$ とする．このとき，品種 k に対してアーク (i, j) が \tilde{A}^k に含まれる場合に限り，フロー関係制約式と強制制約式が必要となる．

パス集合が \tilde{P} に制限され，かつ区分上限値 \tilde{C} をもつ線形緩和問題 $RLLR(\tilde{C}, \tilde{P})$ は，次のように定式化される．

($RLLR(\tilde{C}, \tilde{P})$)

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \sum_{s \in S_{ij}} \left(c_{ij}^s \sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} + f_{ij}^s y_{ij}^s \right) \quad (31)$$

subject to

$$\sum_{p \in \tilde{P}^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K, \quad (32)$$

$$\sum_{p \in \tilde{P}^k} \delta_{ij}^p z_p^k = \sum_{s \in S_{ij}} u_{ij}^{ks} \quad \forall (i, j) \in \tilde{A}^k, k \in K, \quad (33)$$

$$\sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} \geq \tilde{C}_{ij}^{s-1} y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (34)$$

$$\sum_{k \in K} u_{ij}^{ks} \leq \tilde{C}_{ij}^s y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (35)$$

$$u_{ij}^{ks} \leq d^k y_{ij}^s \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in \tilde{A}^k, k \in K, \quad (36)$$

$$\sum_{s \in S_{ij}} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A, \quad (37)$$

$$\frac{\tilde{C}_{ij}^s}{C_{ij}^s} y_{ij}^s \leq 1 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (38)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in \bar{P}^k, k \in K, \quad (39)$$

$$u_{ij}^{ks} \geq 0 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in \tilde{A}^k, k \in K. \quad (40)$$

$$y_{ij}^s \geq 0 \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (41)$$

(32) 式, (33) 式, (34) 式, (35) 式および (36) 式に対する双対変数をそれぞれ π , $\rho(\geq 0)$, $\sigma(\geq 0)$, $\tau(\geq 0)$ および $v(\geq 0)$ とおく. 最適な双対解 $(\pi, \rho, \sigma, \tau, v)$ は, $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$ を最適に解くことによって求めることができる. パスフロー変数 z_p^k の被約費用を r_p^k とし, 区分品種フロー変数 u_{ij}^{ks} の被約費用を q_{ij}^{ks} とすると, これらは次のように表される.

$$r_p^k = \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \rho_{ij}^k - \pi^k \quad \forall p \in P^k, k \in K, \quad (42)$$

$$q_{ij}^{ks} = c_{ij}^s - \sigma_{ij}^s + \tau_{ij}^s + v_{ij}^{ks} - \rho_{ij}^k \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, k \in K. \quad (43)$$

(42) 式において, $\sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \rho_{ij}^k$ は品種 k についてアーク (i, j) の長さを ρ_{ij}^k としたときのパス p の長さであり, π^k は品種 k の始点 O^k と終点 D^k の間の現在の最短パスの長さとして解釈することができる. 基底に入るべき列であるパスフロー変数は, アーク (i, j) の長さが ρ_{ij}^k であるネットワーク上で負の被約費用をもつパスに対応する.

生成されていない負の被約費用をもつパスと区分品種フロー変数を見つけるためには, 品種 k に関する現在の定式化には含まれていないアーク集合 $A \setminus \tilde{A}^k$ に含まれるアークに対応する v_{ij}^{ks} と ρ_{ij}^k の値を定義しておくことが必要となる. そこで, $A \setminus \tilde{A}^k$ に含まれるアークに関連する強制制約式である (36) 式に対する双対変数について, $v_{ij}^{ks} = 0$ と設定する.

列生成により, ある z_p^k が基底解に入り, 基底変換により z_p^k の被約費用 r_p^k が正の値を取るとき, z_p^k に対応する (33) 式に含まれるいくつかの u_{ij}^{ks} も新しく基底に入ることになる. このように, 新しいパスフロー変数が生成されると, 対応する区分品種フロー変数とフロー関係式が未生成の場合には, これらが生成されることになる. しかし, フロー関係式である (33) 式がまだ生成されていない段階では, 品種 k の $A \setminus \tilde{A}^k$ に含まれる (i, j) に対応する被約費用 ρ_{ij}^k は定義することができない. そこで, 生成されていない (33) 式に対する双対変数について, $z_p^k = 0$ および $u_{ij}^{ks} = 0$ であるとみなす. この仮定により, (33) 式は等式で成り立ち, ρ_{ij}^k の値を定義することができる.

ここで, 変数 ρ_{ij}^k は r_p^k と q_{ij}^{ks} の両方に含まれることに注意する. 被約費用が負のパスを探索する際には, アークの長さである ρ_{ij}^k の値は小さい方が好ましい. そこで, 現在の基底変数と基底以外の変数がすべて変更されないという条件の範囲内で, ρ_{ij}^k が最小になるように設定する. すなわち, 対応する u_{ij}^{ks} が依然として非基

底変数で、かつ S_{ij} に含まれる区分 s における q_{ij}^{ks} の最小である被約費用が (43) 式で 0 となるように、 ρ_{ij}^k を設定する。このとき、生成されていない (33) 式に対する ρ_{ij}^k は、次のように表すことができる。

$$\rho_{ij}^k = \min_{s \in S_{ij}} \{c_{ij}^s - \sigma_{ij}^s + \tau_{ij}^s + v_{ij}^{ks}\} \quad \forall (i, j) \in A \setminus \tilde{A}^k, k \in K. \quad (44)$$

続いて、被約費用が負であるパスフロー変数を生成するために価格づけ問題を解く。 π^k は定数と見なすことができるので、品種 k の価格づけ問題 PP^k は次のように表される。

(PP^k)

$$t^k = \min \sum_{(i,j) \in A} \delta_{ij}^p \rho_{ij}^k z_p^k \quad (45)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = d^k, \quad (46)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k. \quad (47)$$

ここで、 t^k は PP^k の最適値とする。

PP^k はアーク (i, j) の長さが ρ_{ij}^k である最短経路問題となる。 PP^k の最適解である最短パスを \hat{p} とする。 $t^k < \pi^k$ のとき、最適パス \hat{p} に対応するパスフロー変数 $z_{\hat{p}}^k$ の被約費用は負となる。そこで、パス \hat{p} を \tilde{P}^k に追加し、対応するパス変数 $z_{\hat{p}}^k$ を新しい列として生成する。その後、 \tilde{A}^k を更新し、関連する区分フロー変数、フロー関係式および強制制約式を生成し、 $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$ に追加する。新しいパスやパスフロー変数が生成されない場合、 $LR(\tilde{C})$ が最適に解かれたことになり、 $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$ の最終解が $LR(\tilde{C})$ の最適解となる。

列生成と行生成のアルゴリズムを Algorithm2 にまとめる。同様に、 $SMFA$ に対しても列生成と行生成法を適用することができる。

5 制限つきの分枝限定法と実行可能解の算出

容量スケールリング法により、指数平滑による区分デザイン変数の推定値が 0 に収束していない変数の数が γ 以下となった場合、制限つきの問題に対して分枝限定法を適用し、計算時間の制限を設けて MIP ソルバーで実行可能解を求める。

容量スケールリング法終了時の区分デザイン変数の推定値 \hat{y}_{ij}^s が 1 であれば適切な近似解でも 1 となる可能性が高く、0 であれば 0 となる可能性が高いと考えられる。そこで、 \hat{y}_{ij}^s が 1 に収束した場合は当該区分デザイン変数は 1 に固定し、0 に収束した場合は当該区分デザイン変数は 0 に固定する。区分デザイン変数が 0 または 1 に収束していない場合には、区分デザイン変数の範囲は 0 または 1 のままとす

る．すなわち， $PMFP(A, P)$ に次の制約を追加することによって，問題の実行可能領域を制限し，問題を縮小する．

$$y_{ij}^s = 0 \quad \text{if } \hat{y}_{ij}^{sl} < \epsilon, \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A, \quad (48)$$

$$y_{ij}^s = 1 \quad \text{if } \hat{y}_{ij}^{sl} > 1 - \epsilon, \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A. \quad (49)$$

$PMFP(A, P)$ で最適解を求めることは，パスを生成しながら分枝限定法などを行う必要があるため，容易ではない．そこで，パス集合 P を \tilde{P} に，アーク集合 A を \tilde{A} に限定した問題 $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ をMIPソルバーを用いて，設定した計算時間 T_{init} のもとで解き，近似解 \tilde{y} を求める．ここで， \tilde{P} は容量スケーリング法において生成されたパスフロー変数の集合であり， \tilde{A} は \tilde{P} に含まれるパスフローが含むアーク集合である．この方法を制限つきの分枝限定法とよぶ．なお， \tilde{A} は $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ の実行可能なアーク集合を含んでいることに注意する．この問題はアーク集合とパス集合が限定され，かつ区分デザイン変数に制限があることから，比較的容易に解を求めることができる．

制限つきの分枝限定法により実行可能解が求められた場合， \tilde{y} の値に区分デザイン変数を固定した $PMFA$ を解く．これは， $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ では，パスフロー変数が限定されているため，必ずしも \tilde{y} に対する最適なフローを求めることができないためである．この問題は，0-1変数が固定されている多品種フロー問題となるため，容易に解くことができる．この解における $PMFA$ の目的関数値は PMF の上界値となる，これを UB とおく．

一方， $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ の実行可能解が求められない場合には，(48)式と(49)式を加えた $PMFA$ を解く．実行可能解が得られた場合，解を \tilde{y} とし，上界値を UB とする．それでも，実行可能解が求められない場合は， $\tilde{y} := \hat{y}$ とし， $UB := \infty$ とする．

制限つきの分枝限定法のアルゴリズムをAlgorithm3に示す．同様の制限つきの分枝限定法によって， $SMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ と $SMFA$ に対しても実行可能解と上界値を算出することができる．

6 MIP 近傍探索法

$PMFA$ に対してMIP近傍探索法を適用する．MIP近傍探索法は，MIPソルバーを用いて暫定解に関する近傍制約を付加した問題を繰り返し解く近似解法(片山直登 2017)である．前節で求めた近似解 \tilde{y} を初期の暫定解とし， PMF では $PMFA$ を用いて暫定解の近傍を探索していく．

はじめに， $PMFA$ に次の制約式を追加する．

$$\sum_{(i,j) \in A | \tilde{y}_{ij}^s = 1} y_{ij}^s \leq L - 1 \quad (50)$$

ここで， L は暫定解 \tilde{y} において値が1となる区分デザイン変数の数である．(50)式は，暫定解において1である区分デザイン変数のうち少なくとも1つの変数の値を変更することを表しており，実行可能領域から暫定解を排除することができる．

続いて、 $PMFA$ に次の M 近傍を与える制約式を追加する。

$$\sum_{(i,j) \in A | \bar{y}_{ij}^s = 1} y_{ij}^s \geq L - M \quad (51)$$

(51) 式は、暫定解において1である区分デザイン変数の値を高々 M 個を変更することを表す。 M は正の整数で近傍の範囲である。 M が大きければ、条件を付加した $PMFA$ の実行可能領域は広くなるため、良い解を算出できる可能性があるが計算時間内で算出できない可能性が高くなる。一方、 M が小さければ実行可能領域は狭くなるため、相対的に短時間で実行可能解を探索できる可能性が高まることになる。

加えて、現在までの最良の上界値を UB とおき、次の式も追加する。

$$\Phi < UB \quad (52)$$

(50) 式と (52) 式により探索済みの解および暫定解を排除し、解の循環を防ぐことができる。なお、現在までの最良値よりも良い上界値が存在しなければ、問題は実行不可能となる。

制限時間 T_{mip} を設け、MIP ソルバーを用いて $PMFA$ に3本の制約式を付加した問題を解く。実行可能解が得られた場合は、改善された解が探索されたことになり、得られた解を新たな暫定解 \bar{y} とする。続いて、追加した3本の制約式を削除して、更新された暫定解に対応する3本の制約式を追加し、近傍探索を繰り返す。実行不可能であることが判明した場合は、 M 近傍において暫定解よりも良い解が無いと判断できたことになり、探索を終了する。

一方、計算時間内に暫定解より良い解を算出することができず、暫定解が更新されない場合は、計算時間内で実行不可能とは判断できないが実行可能解も算出できていない状態である。そこで、 $M := \lfloor M/\zeta \rfloor$ として M を減少させ、探索範囲を縮小する。ここで、 $\zeta (> 1)$ は M の変更基準である。これにより、計算時間内で実行可能解を算出できるまたは実行不可能と判断できる可能性が高まることになる。 $M > 0$ である間、同様の探索を繰り返す。

MIP 近傍探索法のアルゴリズムを Algorithm4 に示す。 $SMFA$ に対しても、同様の MIP 近傍探索法を適用することによって、 SMF の解を改善することができる。

7 数値実験

容量制約をもつネットワーク設計問題で用いられるベンチマーク問題である C 問題 (Pedersen et al. 2009) の内、 PMF で用いられている 43 問を用いて、 PMF および SMF に対する数値実験を行った。

C 問題の各インスタンスは、ノード数、アーク数と品種数によって分類される。2つの文字によって、同一の分類内のインスタンスの性質を区別する。F は固定費用に対してフロー費用が相対的に高く、V はフロー費用が相対的に低いインスタンスである。T は容量が相対的にきつく、L は相対的に緩いインスタンスである。

C問題のインスタンスは，アーク (i, j) に対するデザイン費用 f_{ij} ，フロー費用 c_{ij} とアーク容量 C_{ij} と，始点・終点間の品種の需要量で構成されている．*PMF* および *SMF* では，すべてのアークに対して区分数を $4(|S_{ij}| = 4)$ とし，品種の需要量はそのまま使用する．さらに，区分固定費用は区分番号に比例するように，区分の範囲は区分番号は二乗に比例するように，次のように設定する．

$$f_{ij}^s = \left\lfloor \frac{sf_{ij}}{S_{ij}} \right\rfloor, \quad C_{ij}^s = \left\lfloor \frac{s^2 C_{ij}}{S_{ij}^2} \right\rfloor \quad \forall s \in S_{ij}, (i, j) \in A.$$

また，区分フロー費用は，*PMF* では c_{ij} を使用し，*SMF* では0とする．

数値実験で使用した設定した機器等は以下の通りである．

- 使用 OS および言語：UBUNTU 18.04, C++
- MIP ソルバー：Gurobi 8.01
- CPU AMD Ryzen7 1800X 3.6GHz 8Cores, RAM 32GByte
- 使用コア数：容量スケールリング 1 コア, MIP 近傍探索 8 コア

また，数値実験で使用した設定したパラメータは以下の通りである．

- 容量スケールリングパラメータ α : 0.001~0.120
- 平滑化係数 β : 0.5
- 収束判定基準 ϵ : 0.01
- 容量スケールリングの終了判定基準 γ : 200
- 容量スケールリングの最小繰返し回数 ITE_{min} : 10
- 容量スケールリングの最大繰返し回数 ITE_{max} : 200
- 近傍 M の変更基準 ζ : 2
- 計算時間 T_{init} : 200 秒
- 計算時間 T_{mip} と近傍 M の組合せ : (50 秒,10), (100 秒,20)

近似解の誤差を算出するために，MIP ソルバーである Gurobi により，定式化 *PMFA* および *SMFA* を 10 時間解いて下界値を算出し，同時に上界値も算出した．表の項目は次の通りである．

- GRB : 10 時間の制限時間を設けて，MIP ソルバーである Gurobi により求めた上界値
- OPT/LB : 10 時間の制限時間を設けて，MIP ソルバーである Gurobi により求めた下界値または最適値
- RBA: 基本的な定式化に対する丸めヒューリスティクス (閾値: 0.7, 計算時間 7200 秒)(Croxtton et al. 2007)
- RST: 強い定式化に対する丸めヒューリスティクス (閾値: 0.7, 計算時間 7200 秒)(Croxtton et al. 2007)

- REX: 拡張定式化に対する丸めヒューリスティクス (閾値: 0.7, 計算時間 7200 秒)(Croxtton et al. 2007)
- CL: 容量スケールリング法と局所分枝法(1つの局所分枝の探索時間500秒)(Katayama 2017)
- MIP50: MIP 近傍探索法, $T_{mip} = 50$ 秒
- MIP100: MIP 近傍探索法, $T_{mip} = 100$ 秒
- MIP50T: MIP 近傍探索法, $T_{mip} = 50$ 秒, スケールリングパラメータを最適化したもの
- MIP100T: MIP 近傍探索法, $T_{mip} = 100$ 秒, スケールリングパラメータを最適化したもの
- MIPInit: MIP50 における制限つきの分枝限定法までの解

表1から表5までは PMF に対する結果である。表1は、MIP50およびMIP100で設定した用いたスケールリングパラメータである。なお、初期のパス集合はフロー費用をアークの長さとした品種の始点・終点間の最短パスとした。

表2は、解法ごとの平均誤差である。Gurobiにより得られた下界値を LB , 各解法で得られた上界値を UB としたとき、誤差 (Gap) は次式で算出した。

$$Gap = \frac{UB - LB}{LB}$$

なお、RBA, RST, REX および CL は、Katayama (2017) に掲載されている結果である。

GRB の平均誤差は 0.91% で良い近似解を求めることができている。丸めヒューリスティクスでは実行可能解が求まらない場合が多く、RBA では 26 問、RST では 9 問題、REX では 30 問においてのみ解を求めることができた。実行可能解を求めることができたインスタンスに対して、RBA の平均誤差は 11.82%, RST は 9.99% であり、REX は 2.34% で、他の方法と比較して誤差は大きい。CL の平均誤差は 0.94% であり、1% 以下の解を算出できている。

一方、MIP50 の平均誤差は 0.92%, MIP100 の平均誤差は 0.90% であり、GRB とほぼ同じ誤差となり、CL よりも良い解を算出している。スケールリングパラメータを調整した場合、MIP50T の平均誤差は 0.87%, MIP100T の平均誤差は 0.85% であり、GRB より優れた解を求めることができた。しかし、MIP 探索の時間を長くした場合でも、0.02% 程度の改善に留まっている。MIP 近傍探索を行わない場合である MIPInit の平均誤差は 1.37% であった。MIP 近傍探索により、MIP50 では 0.45%, MIP100 では 0.47%, 解を改善することができている。

表3に、各解法により得られたインスタンスごとの上界値を示す。太字は最適値、斜体は最良値である。GRB は 16 問の最適値、8 問の最良値を算出している。RBA, RST および REX は 1 つの最適値および最良値を求めることができていな

い。CLは14問の最適値，7問の最良値を算出している。MIP50は14問の最適値と4問の最良値，MIP100は15問の最適値と6問の最良値を算出している。MIP50Tは16問の最適値と13問の最良値，MIP100Tは16問の最適値と17問の最良値を算出している。MIPInitは2問の最適値，4問の最良値を算出している。

表4は，解法ごとの平均計算時間である。GRBの平均計算時間は22655.3秒で6時間を越えているが，これは制限時間が10時間と長いためである。RBAでは4985.7秒，RSTでは3290.7秒，REXでは3893.0秒であるが，これは分枝限定法の制限時間を2時間としているためである。CLの平均計算時間は1557.8秒と40分程度となっている。

一方，MIP50の平均計算時間は365.6秒，MIP100では616.6秒となっている。また，MIP50Tの平均計算時間は351.2秒，MIP100Tでは584.6秒となっている。MIPInitでは，151.8秒となっている。MIP近傍探索法では，制限つきの分枝限定法までの計算時間が150秒程度であり，MIP近傍探索に200秒または450秒程度を要している。MIP近傍探索法の計算時間は従来の解法と比較して短くなってはいるが，CLの1/3程度に留まっている。

表5に，各解法により得られたインスタンスごとの計算時間を示す。

表6から表10まではSMFに対する結果である。表6は，MIP50およびMIP100で設定した用いたスケーリングパラメータであり，初期のパス集合は”最大区分の固定デザイン費用/最大区分の上限値”をアークの長さとした品種の始点・終点間の最短パスとした。

表7は，解法ごとの平均誤差である。なお，CLの結果は存在していないため，掲載していない，また，RBA,RST，およびREXはMIT50と同じCPUを用いて計算を行った。GRBの平均誤差は7.73%である。丸めヒューリスティクスでは実行可能解が求まらない場合が多く，RBAでは25問，RSTでは17問題，REXでは37問においてのみ解を求めることができた。RBAの平均誤差は18.27%，RSTは11.17%であり，REXは9.91%である。いずれの場合もPMFに比べて，SMFの解の誤差が大きくなっている。

一方，MIP50の平均誤差は7.37%，MIP100の平均誤差は7.14%であり，GRBよりも良い結果が得られている。スケーリングパラメータを調整した場合，MIP50Tの平均誤差は6.62%，MIP100Tの平均誤差は6.44%であり，平均誤差が6%台の解を算出することができている。しかし，MIP50とMIP100，MIP50TとMIP100Tの差は，0.2%程度である。MIP近傍探索を行わない場合であるMIPInitの平均誤差は10.59%であった。MIP近傍探索により，MIP50では3.22%，MIP100では3.45%，解を改善することができており，MIP近傍探索が有効であることが分かる。

表8に，各解法により得られたインスタンスごとの上界値を示す。GRBは8問の最適値，12問の最良値を算出している。RBAは最適値および最良値を求めることができていない。RSTは1問，REXは3問の最適値を算出している。MIP50は5問の最適値と2問の最良値，MIP100は5問の最適値と4問の最良値を算出している。MIP50Tは7問の最適値と11問の最良値，MIP100Tでは7問の最適値と21問の最良値を算出している。MIPInitは1問の最適値を算出している。

表9は、解法ごとの平均計算時間である。GRBの平均計算時間は28739.6秒で6時間を越えている。RBAでは5638.9秒、RSTでは4194.4秒、REXでは4603.3秒である。

一方、MIP50の平均計算時間は616.7秒、MIP100では937.0秒となっている。また、MIP50Tの平均計算時間は597.2秒、MIP100Tでは934.5秒となっている。MIPInitでは、285.1秒となっている。MIP近傍探索法では、制限つきの分枝限定法までの計算時間が300秒程度であり、MIP近傍探索に300秒または600秒程度を要している。PMFと比べて計算時間が長い理由は、MIP近傍探索の初期解であるMIPInitの誤差が大きく、MIP近傍探索の繰り返し回数が多くなったためである。

表10に、各解法により得られたインスタンスごとの計算時間を示す。

PMFと比較してSMFの解の誤差が大きなことから、2つのインスタンス(20/230/040/V/T, 20/300/040/V/L)について、計算時間を延長して計算を行った。MIP探索では、MIP探索の計算時間を2000秒に設定して、上界値を算出した。なお、スケールパラメータは最良値のものを使用した。また、GRBでは、計算時間を1000時間に設定し、下界値と上界値を算出した。結果を表11にまとめる。

20/230/040/V/Tにおいて、GRBでは下界値が8979.6、上界値が9239となった。下界値が8599から8979.6に改善されたことにより、誤差は7.44%から2.89%と大きく減少している。なお、Gurobiは123.3時間でエラーで終了している。一方、MIP100の上界値は9251であったが、MIP2000の上界値は9236となり、上界値はわずかに0.1%減少するに留まっているが、誤差は7.58%から2.86%と大きく減少している。

20/300/040/V/Lにおいて、GRBでは下界値が11802.4、上界値が12090となった。下界値が11548から11802.4に改善されたことにより、誤差は5.55%から2.44%と大きく減少している。なお、Gurobiは190.0時間でエラーで終了している。MIP100の上界値は12212であったが、MIP2000の上界値は12090となり、上界値は1.0%減少し、誤差は5.75%から2.44%と大きく減少している。

以上のことから、SMFの誤差の多くは下界値の悪さにあることが推定された。このため、近似解法による誤差を評価するためには、ラグランジュ緩和や強い妥当方程式などにより、より良い下界値の算出が必要であることが分かった。

8 おわりに

本研究では、区分的線形費用を考慮した多品種流ネットワークフロー問題と階段状費用を考慮した多品種流ネットワークフロー問題に対して、容量スケール法、制限つきの分枝限定法およびMIP近傍探索法を組合せた近似解法を提案した。ベンチマーク問題に対して、区分的線形費用を考慮した問題では1%以内の近似解を短時間で算出することができた。

一方、階段状費用を考慮した問題では6から7%程度となり、区分的線形費用と比べて10倍以上の誤差となった。しかし、MIPソルバーで長時間計算して解を算出した場合と比べた場合には、優れた解を算出することができた。

階段状費用を考慮した問題の誤差の多くは下界値の悪さにあることが推定され、ラグランジュ緩和や強い妥当方程式などにより、より良い下界値の算出が必要であることが分かった。

本研究は科学研究費基盤研究C(課題番号17K01268)による成果の一部である。

参考文献

- Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2003. A comparison of mixed-integer programming models for nonconvex piecewise linear cost minimization problems. *Management Science* **49** 1268–1273.
- Croxton, K. L., B. Gendron, T. L. Magnanti. 2007. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research* **55** 146–157.
- Fortz, B., L. Gouveia, M. Joyce-Moniz. 2017. Models for the piecewise linear unsplittable multicommodity flow problems. *European Journal of Operational Research* **261** 30–42.
- Gendron, B., L. Gouveia. 2016. Reformulations by discretization for piecewise linear integer multicommodity network flow problems. *Transportation Science* **51**(2). doi:10.1287/trsc.2015.0634.
- Katayama, N. 2017. A combined matheuristic for the piecewise linear multicommodity network flow problem. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* **34**(6). doi:10.1142/S0217595917500336.
- Kim, D., X. Pan, P. M. Pardalos. 2006. An enhanced dynamic slope scaling procedure with tabu scheme for fixed charge network flow problems. *Computational Economics* **27** 273–293.
- Kim, D., P. M. Pardalos. 2000a. A dynamic domain contraction algorithm for nonconvex piecewise linear network flow problems. *Journal of Global Optimization* **17** 225–234.
- Kim, D., P. M. Pardalos. 2000b. Dynamic slope scaling and trust interval techniques for solving concave piecewise linear network flow problems. *Networks* **35** 216–222.
- Magnanti, T. L., R. T. Wong. 1984. Network design and transportation planning : Models and algorithms. *Transportation Science* **18** 1–55.
- Minoux, M. 1989. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks* **19** 313–360.
- Muriel, A., F. N. Munshi. 2004. Capacitated multicommodity network flows with piecewise linear concave costs. *IIE Transactions* **36** 683–696.
- Pedersen, M. B., T. G. Crainic, O. B. G. Madsen. 2009. Models and tabu search metaheuristics for service network design with asset-balance requirements. *Transportation Science* **43** 158–177.
- Wong, R. T. 1984. Introduction and recent advances in network design: Models and algorithms. M. Florian, ed., *Transportation Planning Models*. Elsevier Science, North Holland, Amsterdam, 187–225.
- Wong, R. T. 1985. Location and network design. M. O’heEigartaigh, J. Lenstra, A. RinnooyKan, eds., *Combinatorial Optimization Annotated Bibliographies*. John Wiley & Sons, New York, 129–147.
- 片山直登. 2017. 容量制約をもつネットワーク設計問題に対するMIP近傍探索法. 流通経済大学流通情報学部紀要 **22**(1) 1–18.

Algorithm 1: Capacity Scaling

INPUT: A (arc set), C (segment upper bound), \tilde{P} (initial feasible path set), \tilde{A} (arc set with path), α (scaling parameter), β (smoothing parameter), γ (termination parameter), ϵ (convergence parameter), ITE_{min} (minimum iteration of capacity scaling), ITE_{max} (maximum iteration of capacity scaling);
OUTPUT: \tilde{A} (arc set with path), \tilde{P} (current feasible path set), \hat{y} (estimated solution);

$l \leftarrow 0$;

$\tilde{C} \leftarrow C$;

repeat

$l \leftarrow l + 1$;

 Solve $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$;

 Get the solution \bar{y} of $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$;

 Update \tilde{P} and \tilde{A} by Column Generation and Row Generation;

$n \leftarrow 0$;

for $(i, j) \in A$ **do**

for $s \in S_{ij}$ **do**

$\tilde{C}_{ij}^s := \alpha \tilde{C}_{ij}^s \max_{h \in S_{ij}} \bar{y}_{ij}^h + (1 - \alpha) \tilde{C}_{ij}^s$;

$\hat{y}_{ij}^s := \beta \bar{y}_{ij}^s + (1 - \beta) \hat{y}_{ij}^s$;

if $\hat{y}_{ij}^s > \epsilon$ **then**

$n \leftarrow n + 1$

end

end

end

until $l \geq ITE_{min}$ and $n \leq \gamma$, or $l \geq ITE_{max}$;

Algorithm 2: Column Generation and Row Generation

INPUT: \tilde{P} (current path set), \tilde{A} (arc set with path), \tilde{C} (current segment upper bound);

OUTPUT: \tilde{P} (current path set), \tilde{A} (arc set with path);

repeat

Solve $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$ by an MIP solver; ;

Get the optimal dual solution $(\pi, \rho, \sigma, \tau, \nu)$ of $RLR(\tilde{C}, \tilde{P})$;

for $k \in K$ **do**

$\rho_{ij}^k := \min_{s \in S_{ij}} \{c_{ij}^s - \sigma_{ij}^s + \tau_{ij}^s + \nu_{ij}^{ks}\} \quad \forall (i, j) \in A \setminus \tilde{A}^k, k \in K$;

Solve PP^k ;

Get the shortest path \hat{p} and the shortest path length t^k ;

if $t^k < \pi^k$ **then**

\hat{p} is added to \tilde{P}^k , and generate path variable $z_{\hat{p}}^k$;

for $(i, j) \in \hat{p}$ **do**

if $(i, j) \notin \tilde{A}^k$ **then**

$\tilde{A}^k \leftarrow \tilde{A}^k \cup (i, j)$;

Generate $u_{ij}^{ks}, s \in S_{ij}$;

Generate constraints (33) and (36) associated with (i, j) and k ;

end

end

end

end

until no path variable is generated;

Algorithm 3: Resticted Branch-and-Bound

INPUT: \tilde{A} (arc set with path), \tilde{P} (current path set), \hat{y} (estimated solution),
 T_{init} (computation time);

OUTPUT: \tilde{y} (feasible solution), UB (upper bound);

Add equations (48) and (49) to $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ by \hat{y} ;

Solve $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ within time T_{init} ;

if the feasible solution y' of $PMFP(\tilde{A}, \tilde{P})$ is found **then**

$\tilde{y} \leftarrow y'$;

 Solve $PMFA$ fixed y to \tilde{y} ;

 Get the upper bound UB' of $PMFA$;

$UB \leftarrow UB'$;

else

 Add equations (48) and (49) to $PMFA$ by \hat{y} ;

 Solve $PMFA$ within time T_{init} ;

if the feasible solution y' of $PMFA$ is found **then**

 Get the upper bound UB' of $PMFA$;

$\tilde{y} \leftarrow y'$;

$UB \leftarrow UB'$;

else

$\tilde{y} \leftarrow \hat{y}$;

$UB \leftarrow \infty$;

end

end

Algorithm 4: MIP Neighborhood Search

INPUT: \tilde{y} (current solution), UB (upper bound), ζ (decrease parameter),
 M (neighborhood parameter), T_{mip} (computation time);
OUTPUT: \tilde{y} (feasible solution), UB (upper bound);

repeat

 Add equations (50), (51) and (52) to $PMFA$ associated with the current
 solution \tilde{y} ;

 Solve $PMFA$ within time T_{mip} ;

if $PMFA$ has no feasible solution **then**
 break;

else

if the solution y' of $PMFA$ is found **then**

 Get the upper bound UB' of $PMFA$;

$\tilde{y} \leftarrow y'$;

$UB \leftarrow UB'$;

else

$M \leftarrow \lfloor M/\zeta \rfloor$;

end

end

 Delete equations (50), (51) and (52) from $PMFA$;

until $M = 0$;

表 1: Scaling Parameter α for PMF

Arcs	25 & 100	230	300	520	700
MIP50	0.032	0.012	0.015	0.026	0.076
MIP100	0.017	0.0012	0.015	0.026	0.076

表 2: Average Gap for PMF (%)

GRB	RBA	RST	REX	CL	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
0.91	11.82*	9.99**	2.34***	0.94	0.92	0.90	0.87	0.85	1.37

* 26 instances; ** 9 instances; *** 30 instances

表 3: Results for PMF

N/A/K/FC	OPT/LB	GRB	RBA	RST	REX	CL	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
25/100/10/F/L	12116	12116	-	-	13612	12116	12116	12116	12116	12116	12422
25/100/10/F/T	39786	39786	-	-	42260	39786	39786	39786	39786	39786	40924
25/100/10/V/L	14163	14163	-	-	14534	14163	14163	14163	14163	14163	14163
25/100/30/F/L	27050	27050	-	-	28249	27050	27050	27050	27050	27050	27450
25/100/30/F/T	73056	73056	-	-	-	73056	73056	73056	73056	73056	73287
25/100/30/V/T	363674	363674	-	-	366683	363674	363674	363674	363674	363674	363684
100/400/010/F/T	17348	17348	-	-	-	17348	17348	17348	17348	17348	17348
100/400/010/F/T	46079.4	46919	-	-	-	47521	47000	47055	46861	47019	50669
100/400/030/V/L	27695	27695	-	-	-	27695	27695	27695	27695	27695	27707
100/400/030/F/L	31709.4	32854	-	-	-	33107	32931	32799	32931	32799	33122
100/400/030/F/T	103546.4	107117	-	-	-	107741	107870	107722	107870	107655	108451
100/400/030/V/T	380501	380501	-	-	-	380501	380518	380518	380501	380501	380580
20/230/040/V/L	399464	399464	-	-	402747	399464	399464	399464	399464	399464	399811
20/230/040/V/T	366745	366745	-	-	370122	366745	366745	366745	366745	366745	366837
20/230/040/F/T	618874	618874	755532	-	629937	619061	618874	618874	618874	618874	620966
20/230/200/V/L	8701.1	87899	95857	-	88332.5	87899	87899	87899	87899	87899	87899
20/230/200/F/L	128251.4	130445.5	138373	-	131805.3	130518	130729.5	130729.5	130530	130530	130816
20/230/200/V/T	91933.1	92768	99360	-	92235.5	92792	92897.7	92897.7	92775	92775	92897.7
20/230/200/F/T	127657.3	129912	137656	-	130945	129912	129912	129912	129912	129912	129912
20/300/040/V/L	407608	407608	-	-	411370	407608	407608	407608	407608	407608	409059
20/300/040/F/L	543910	543910	774722	-	561147	543910	543910	543910	543910	543910	547126
20/300/040/V/T	456965	456965	524293	-	459420	456990	456965	456965	456965	456965	456990
20/300/040/F/T	585371	585371	688023	-	-	585371	585371	585371	585371	585371	588147
20/300/200/V/L	70766.1	71804	75896	-	71886.7	71762	71841	71841	71746	71746	71841
20/300/200/F/L	108740.7	110603.7	117177	1121122.5	111385	110441.5	110560.8	110560.8	110479	110479	110560.8
20/300/200/V/T	71705.8	72376.5	76759	778757	72590	72402	72364	72364	72319.7	72319.7	72364
20/300/200/F/T	101591.7	103726.7	108961.5	1113106	104545.5	103585.8	103836.5	103836.5	103729	103729	103946
30/520/100/V/L	50111.3	50419	59484.9	-	50823	50428	50484	50484	50427	50409	50549
30/520/100/F/L	85067.5	87425	102733.7	-	87991	87120	87234	87234	87120	87120	87389.3
30/520/100/V/T	49937.9	50121	55040	-	50848	50123	50209	50143	50118	50117.7	50387
30/520/100/F/T	90629.8	91877	-	-	93076	92015	92052	92052	91952.7	91952.7	92161
30/520/400/V/L	107317.7	108080.3	114237.8	-	108409	107962.8	107962.8	107962.8	107962.8	107962.8	107962.8
30/520/400/F/L	142224.4	144068.3	151317.5	1154215	144623.9	144147	143942.5	143942.5	143925.5	143925.5	143942.5
30/520/400/V/T	109902.7	110707.9	116501.6	1117831.5	110962.8	110664.1	110728.7	110728.7	110652.3	110652.3	110743.1
30/520/400/F/T	145513.1	148004	155062	1159237.1	148452.4	147745.9	147467.9	147467.9	147382.7	147382.7	147530.2
30/700/100/V/L	44372.4	44426	54184	-	44964	44446	44493	44476	44460	44447	44493
30/700/100/F/L	55098.3	55762	-	-	56768	55820	55913	55913	55837	55819	55927
30/700/100/V/T	44163.6	44371	47874.3	550080	44804	44449	44450	44431	44418	44374	44501
30/700/100/F/T	51375.1	51961	58626.3	-	53014	51955	52009	51950	51969	51950	52072.5
30/700/400/V/L	91785.6	92637.4	99088.9	-	92835.9	92668.1	92582.3	92582.3	92533.7	92533.7	92582.3
30/700/400/F/L	127116.2	130603.5	136367.9	1142305.5	130440.7	129605.3	129047.4	129047.4	129047.4	129047.4	129080.3
30/700/400/V/T	90631.5	91510.9	96855.5	-	91616.2	91420.8	91424.3	91424.3	91364	91364	91424.3
30/700/400/F/T	124444.5	126048.7	131232	1133019.1	126708.5	125913.7	125759.8	125759.8	125725.3	125725.3	125759.8

-:Infeasible

表 4: Average Computation Time for $PMF(\%)$

GRB	RBA	RST	REX	CL
22655.3	4985.7*	3290.7**	3893.0***	1557.8
MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
365.6	616.6	351.2	584.6	151.8

* 26 instances; ** 9 instances; *** 30 instances

表 5: Results for *PMF*

N/A/K/FC	GRB	RBA	RST	REX	CL	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
25/100/10/F/L	9.9	-	-	0.5	17.0	121.7	48.6	25.1	42.2	1.3
25/100/10/F/T	11.3	-	-	0.4	9.5	18.3	37.9	17.5	27.1	0.4
25/100/10/V/L	0.1	-	-	0.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.0
25/100/30/F/L	75.4	-	-	7.2	32.2	166.4	334.7	114.4	330.1	2.6
25/100/30/F/T	127.2	-	-	-	112.8	210.7	532.7	157.0	372.3	4.1
25/100/30/V/T	3.2	-	-	0.8	5.7	5.1	4.5	2.0	2.0	0.5
100/400/010/F/T	151.0	-	-	-	80.1	106.7	298.6	106.6	297.9	1.1
100/400/010/F/T	36000.0	-	-	-	1360.5	418.0	646.3	418.0	535.2	1.4
100/400/030/V/L	6.4	-	-	-	11.2	6.5	9.1	6.4	9.0	0.1
100/400/030/F/L	36000.0	-	-	-	1631.1	528.0	1014.7	468.6	903.1	250.6
100/400/030/F/T	36000.1	-	-	-	1872.5	408.2	951.6	408.2	951.6	37.0
100/400/030/V/T	1541.4	-	-	-	570.2	159.2	355.6	110.1	255.9	1.8
20/230/040/V/L	6.7	-	-	0.6	15.6	22.6	17.7	22.6	14.3	0.1
20/230/040/V/T	11.7	-	-	0.8	26.7	36.4	57.0	29.9	30.5	0.2
20/230/040/F/T	77.9	1.7	-	0.9	229.2	181.5	444.1	181.2	325.1	0.1
20/230/200/V/L	36000.1	7200.2	-	3837.4	2395.6	488.2	790.5	483.8	784.3	238.0
20/230/200/F/L	36000.0	7200.2	-	7357.1	2723.5	611.7	917.5	611.7	917.5	290.6
20/230/200/V/T	36000.0	7200.2	-	4306.4	2480.5	440.9	742.4	440.9	742.4	219.1
20/230/200/F/T	36000.0	7200.2	-	7337.9	2466.4	516.3	821.9	514.4	816.1	248.7
20/300/040/V/L	10.0	-	-	0.6	18.1	49.4	31.3	32.1	29.7	0.1
20/300/040/F/L	82.0	2.4	-	1.2	50.1	148.2	194.9	105.9	194.2	0.3
20/300/040/V/T	26.7	1.2	-	0.9	21.1	39.3	15.8	35.3	13.1	0.2
20/300/040/F/T	35.8	6.0	-	-	114.4	142.7	179.1	142.7	162.5	0.3
20/300/200/V/L	36000.0	7200.2	-	7303.0	2336.3	456.5	755.6	456.5	755.6	226.2
20/300/200/F/L	36000.0	7200.2	152.3	7309.2	3299.8	624.7	916.7	621.0	916.7	303.4
20/300/200/V/T	36000.0	7200.2	27.0	2032.4	2301.8	436.1	735.0	435.0	735.0	215.1
20/300/200/F/T	36000.1	7200.3	112.8	7245.7	3604.2	530.5	827.4	511.7	809.0	247.9
30/520/100/V/L	36000.2	3217.8	-	116.6	1692.3	504.3	783.7	504.3	725.7	201.4
30/520/100/F/L	36000.1	6368.1	-	3367.1	2442.8	461.2	762.7	461.2	762.7	234.9
30/520/100/V/T	36000.1	1561.4	-	202.2	1180.6	553.4	1328.3	404.0	869.6	201.0
30/520/100/F/T	36000.0	-	-	6951.8	2197.3	434.6	734.9	434.6	734.9	220.5
30/520/400/V/L	36000.2	7200.9	-	7976.3	2596.1	494.2	799.4	484.7	788.5	221.9
30/520/400/F/L	36000.4	7200.9	7301.6	8164.1	2988.3	715.9	1022.7	715.9	1022.7	350.2
30/520/400/V/T	36000.2	7200.9	2104.4	7969.7	2615.5	483.0	788.7	483.0	788.7	227.4
30/520/400/F/T	36000.2	7200.9	7295.7	8262.9	2722.8	639.8	947.2	639.8	947.2	301.6
30/700/100/V/L	36000.1	937.4	-	50.8	2104.9	264.1	697.4	255.0	590.4	52.4
30/700/100/F/L	36000.0	-	-	4313.0	2759.4	424.8	724.4	424.8	724.4	216.1
30/700/100/V/T	36000.0	2179.5	378.4	713.9	1655.4	406.4	992.3	406.4	992.0	202.7
30/700/100/F/T	36000.0	143.2	-	6098.7	2699.6	414.4	1005.2	414.4	1005.2	208.8
30/700/400/V/L	36000.3	7201.1	-	8644.3	2726.2	627.3	912.3	627.3	912.3	321.3
30/700/400/F/L	36000.3	7201.5	4901.1	9022.9	3238.2	1145.9	1438.5	1145.9	1438.5	667.8
30/700/400/V/T	36000.3	7201.1	-	9022.9	2692.3	564.1	871.1	564.1	871.1	271.3
30/700/400/F/T	36000.3	7201.1	7342.8	8907.4	2887.6	715.1	1026.1	677.1	989.7	335.9

-:Infeasible

表 6: Smoothing Parameter α for SMF

Arcs	25 & 100	230	300	520	700
MIP50	0.036	0.008	0.017	0.111	0.051
MIP100	0.089	0.034	0.037	0.111	0.051

表 7: Average Gap for $SMF(\%)$

GRB	RBA	RST	REX	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
7.73	18.27*	11.17**	9.91***	7.37	7.14	6.62	6.44	10.59

* 25 instances; ** 17 instances; *** 37 instances

表 8: Results for SMF

N/A/K/FC	OPT/LB	GRB	RBA	RST	REX	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
25/100/10/F/L	8885	8885	-	-	9843	8885	8885	8885	8885	9924
25/100/10/F/T	16589	16589	-	-	-	16589	16589	16589	16589	17024
25/100/10/V/L	667	667	-	-	-	667	667	667	667	667
25/100/30/F/L	14696	14696	27794	-	15357	14793	14696	14701	14696	15064
25/100/30/F/T	16021	16021	-	-	16207	16056	16042	16021	16042	16324
25/100/30/V/T	1591	1591	2691	-	-	1591	1592	1591	1591	1697
100/400/010/F/T	13264	13264	-	-	-	13529	13376	13264	13264	13870
100/400/010/F/T	26954	29053	-	-	32753	29961	28872	29172	28872	31170
100/400/030/F/L	1584	1584	-	-	24073	1584	1584	1584	1584	1649
100/400/030/F/L	19072	22068	-	-	-	21704	21699	13264	13264	22021
100/400/030/F/T	33387	38481	-	-	41289	39969	39192	39593	39106	40179
100/400/030/V/T	2981	3350	-	-	3710	3513	3568	3502	3488	3573
20/230/040/V/L	12968	13302	-	-	13943	13302	13288	13302	13204	13932
20/230/040/V/T	8599	9411	10296	-	9677	9420	9423	9283	9251	9456
20/230/040/F/T	42205	43713	50284	50264	45991	43922	44053	43777	43618	44591
20/230/200/V/L	21373	22736	-	24000	22847	22843	22843	22727	22727	22843
20/230/200/F/L	49983	55118	56508	57554	55033	54944	54868	54818	54818	54944
20/230/200/V/T	23744	25799	-	26683	25943	26208	26088	26037	26037	26208
20/230/200/F/T	52898	55131	57249	-	55567	56889	56684	56321	56293	56889
20/300/040/V/L	11548	12189	-	-	12592	12428	12344	12278	12212	21342
20/300/040/F/L	47850	49705	-	-	-	50621	49705	49835	49705	51370
20/300/040/V/T	9138	9402	11004	10416	-	9408	9426	9468	9402	9759
20/300/040/F/T	39572	41994	-	-	44142	42544	42668	42343	41943	42969
20/300/200/V/L	17767	19025	19506	19521	19142	19276	19338	19074	19074	19276
20/300/200/F/L	43661	46315	47456	48027	47019	46328	46763	46328	46328	46569
20/300/200/V/T	16761	17791	17852	-	17711	17893	17913	17845	17845	17893
20/300/200/F/T	40638	42749	43639	44353	43200	43490	43490	43028	43028	43490
30/520/100/V/L	5208	5872	6432	-	5840	5826	5826	5800	5800	5826
30/520/100/F/L	23065	25423	-	-	25403	26535	26535	25758	25758	26535
30/520/100/V/T	3706	3986	4261	4193	3991	3993	3993	3985	3985	3993
30/520/100/F/T	22474	25234	26015	-	24861	24574	24574	24574	24574	24882
30/520/400/V/L	16075	17086	17476	17152	17345	17265	17265	17024	17024	17265
30/520/400/F/L	27740	29636	30152	29822	29490	30040	30040	29829	29829	30122
30/520/400/V/T	15351	16323	16484	-	16395	16150	16150	16150	16125	16150
30/520/400/F/T	31614	33137	33515	33497	33378	33486	33486	33207	33207	33486
30/700/100/V/L	4108	4700	5067	4831	4692	4595	4595	4570	4570	4649
30/700/100/F/L	8144	9428	9973	-	9138	9244	9244	9208	9208	9326
30/700/100/V/T	3527	4297	-	-	3938	3869	3869	3869	3869	3921
30/700/100/F/T	7631	8424	8971	8780	8406	8475	8475	8338	8338	8527
30/700/400/V/L	13221	15371	14338	14195	-	14258	14230	14083	14081	14348
30/700/400/F/L	27058	32054	30358	29391	-	29385	29221	28924	28924	29541
30/700/400/V/T	12045	13758	12957	12777	-	12947	12912	12816	12816	12947
30/700/400/F/T	25356	29059	27598	-	27183	27129	27051	27017	27017	27236

-:Infeasible

表 9: Average Computation Time for $SMF(\%)$

GRB	RBA	RST	REX	
28739.6	5638.9*	4194.4**	4603.3***	
MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
616.7	937.0	597.2	934.5	285.1
* 25 instances; ** 17 instances; *** 37 instances				

表 10: Results for *SMF*

N/A/K/FC	GRB	RBA	RST	REX	MIP50	MIP100	MIP50T	MIP100T	MIPInit
25/100/10/F/L	47.7	-	-	0.8	182.3	120.8	132.0	100.1	0.5
25/100/10/F/T	8.1	-	-	-	16.9	19.8	16.8	19.7	0.1
25/100/10/V/L	0.9	-	-	-	1.4	1.4	1.4	1.4	0.1
25/100/30/F/L	252.9	-	-	4.6	156.8	389.3	154.4	379.8	1.6
25/100/30/F/T	113.8	-	-	1.4	198.7	604.1	148.4	402.3	0.6
25/100/30/V/T	448.7	-	-	-	173.7	532.7	172.9	474.8	2.3
100/400/010/F/T	853.4	-	-	-	172.0	526.3	171.7	418.6	0.4
100/400/010/F/T	36000.0	-	-	42.9	324.9	945.3	395.8	665.5	6.2
100/400/030/F/L	9593.6	-	-	7207.7	176.3	425.8	175.9	425.4	1.2
100/400/030/F/L	36000.0	0.1	-	-	524.8	965.9	375.2	710.5	149.3
100/400/030/F/T	36000.0	-	-	7208.1	425.4	1341.7	673.4	1276.2	215.3
100/400/030/V/T	36000.0	0.1	-	7207.6	477.1	827.8	427.4	727.9	220.9
20/230/040/V/L	36000.0	-	-	8.6	371.1	578.8	262.6	897.0	7.2
20/230/040/V/T	459.0	5.7	-	25.5	236.8	765.7	209.8	624.9	17.3
20/230/040/F/T	36000.0	3.4	3.0	31.0	209.4	595.1	257.4	517.5	5.2
20/230/200/V/L	36000.0	-	82.1	1046.7	491.2	763.3	410.3	708.1	204.5
20/230/200/F/L	36000.0	7200.5	7222.4	7309.9	502.8	775.1	538.0	835.0	238.0
20/230/200/V/T	36000.1	-	5181.6	7278.9	483.3	771.7	513.1	815.2	239.4
20/230/200/F/T	36000.1	7200.5	-	547.6	483.4	772.2	468.2	868.3	226.6
20/300/040/V/L	36000.0	-	-	788.5	553.6	750.7	586.6	727.7	203.2
20/300/040/F/L	36000.0	-	-	-	299.7	633.1	182.5	533.7	4.1
20/300/040/V/T	36000.0	1.8	6.2	-	379.5	832.9	276.1	640.9	65.3
20/300/040/F/T	36000.0	-	-	308.9	419.5	726.9	275.0	654.9	201.1
20/300/200/V/L	36000.1	7200.7	2171.2	7286.0	490.1	780.1	506.1	806.0	242.5
20/300/200/F/L	36000.1	7200.6	106.9	1059.0	504.2	991.3	465.8	763.7	234.4
20/300/200/V/T	36000.1	7200.6	-	1165.2	461.6	756.3	470.8	771.2	225.9
20/300/200/F/T	36000.1	7200.7	464.7	2484.3	482.2	771.1	485.6	785.4	224.0
30/520/100/V/L	36000.0	7200.6	-	7280.0	549.9	854.1	549.4	850.9	305.3
30/520/100/F/L	36000.1	-	-	7281.1	528.2	831.8	479.3	777.5	289.3
30/520/100/V/T	36000.1	4105.4	545.6	6349.1	470.6	773.0	451.4	750.0	248.9
30/520/100/F/T	36000.0	7201.0	-	7274.9	468.1	769.8	470.8	772.0	248.0
30/520/400/V/L	36000.2	7204.5	7408.9	8214.2	1806.0	2095.6	1494.0	2197.9	1095.5
30/520/400/F/L	36000.3	7205.1	7425.0	8498.5	1457.6	1749.3	1457.4	1746.0	859.0
30/520/400/V/T	36000.2	7205.1	-	8663.1	1358.8	1651.6	1208.6	1512.6	770.1
30/520/400/F/T	36000.2	7205.6	7563.5	8478.7	1397.0	1702.5	999.3	1774.5	783.3
30/700/100/V/L	36000.1	7201.1	7246.2	7303.4	571.6	871.9	535.8	839.6	304.1
30/700/100/F/L	36000.1	7201.1	-	7299.8	578.6	880.3	548.6	850.8	267.8
30/700/100/V/T	36000.1	-	-	7302.2	494.0	794.6	517.3	923.6	255.2
30/700/100/F/T	36000.1	7201.3	7237.1	7312.3	482.3	782.9	471.1	769.7	246.4
30/700/400/V/L	36000.8	7205.9	7570.9	-	2490.2	2858.4	1990.4	3274.7	1272.7
30/700/400/F/L	36005.3	7207.0	7583.5	-	2201.8	2575.7	2752.5	2980.3	1166.7
30/700/400/V/T	36009.5	7207.0	7646.9	-	1233.5	1568.6	1531.4	1810.3	639.9
30/700/400/F/T	36007.6	7206.7	-	9636.3	1232.9	1565.6	1470.9	1801.3	568.2

-:Infeasible

表 11: Results for 20/230/040/V/T and 20/300/040 in *SMF*

Instance	Method	LB	UB	Gap (%)	Time(s)
20/230/040/V/T	MIP(100,20)	-	9251	7.58%*	624.9
	MIP(2000,20)	-	9236	2.86%	10150.5
	GRB(1000h)	8979.6	9239	2.89%	443908
20/300/040/V/L	MIP(100,20)	-	12212	5.75%*	727.7
	MIP(2000,20)	-	12090	2.44%	10155.3
	GRB(1000h)	11802.4	12090	2.44%	684072

*:下界値は GRB(10h)