《論　文》

容量制約をもつネットワーク設計問題に対する n 分割不等式

片　山　直　登

1　はじめに

容量制約をもつネットワーク設計問題（capacitated network design problem；*CND*）は，アーク上のフロー量がアーク容量以下であるという容量制約をもつ設計問題である．アーク容量は通信回線容量や輸送能力に相当し，容量制約をもたないネットワーク設計問題に比べより現実的なモデルとなる．容量制約があるために，容量制約をもたない問題に比べて最適値と緩和問題の下界値とのギャップが大きくなる傾向がある．また，デザイン変数を固定したフロー問題がタイトな多品種フロー問題となるため，実行可能解を求めること自体に手間がかかるなど，難しい問題となる．

本論文では，向きのないアークを含む容量制約をもつネットワーク設計問題を対象とし，この問題に対するいくつかの妥当不等式を提案する．

2　問題の定式化

はじめに，本研究で対象とする容量制約をもつネットワーク設計問題の定義を示す．

定義2.1（容量制約をもつネットワーク設計問題*CND*）

ノード集合 N，デザイン費用 f，フロー費用 c およびアーク容量 C をもつ向きのないアーク集合 A，需要 d をもつ品種集合 K が与えられている．このとき，すべてのアーク上のフロー量がアーク容量以下であり，フロー費用とデザイン費用の合計を最小にするアーク集合 $A'(\subseteq A)$ と各品種のフローを求めよ．

アーク (i, j) 上の品種 k の i から j 向きの単位当たりのフロー費用を c_{ij}^{k}，フロー量

を表すフロー変数をx_{ij}^kとする．アーク（i, j）のデザイン費用をf_{ij}，アーク容量をC_{ij}とする．アーク（i, j）の0−1のデザイン変数をy_{ij}とし，$y_{ij}=1$であればアーク（i, j）を選択し，$y_{ij}=0$であればアーク（i, j）を選択しないことを表す．また，品種kの需要をd^kとし，ノードnを端点とするアークの他方の端点の集合をN_nとする．このとき，*CND*のアークフローによる定式化を示す．

$$
\begin{aligned}
\text{最小化}\quad & \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}(c_{ij}^k x_{ij}^k + c_{ji}^k x_{ji}^k) + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} && (1)\\
\text{条件}\quad & \sum_{i\in N_n} x_{in}^k - \sum_{j\in N_n} x_{nj}^k = d_n^k \quad \forall n\in N,\ k\in K && (2)\\
& \sum_{k\in K}(x_{ij}^k + x_{ji}^k) \le C_{ij}y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A && (3)\\
& x_{ij}^k + x_{ji}^k \le d^k y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A, k\in K && (4)\\
& x_{ij}^k \ge 0, x_{ji}^k \ge 0 \quad \forall (i,j)\in A, k\in K\\
& y_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A
\end{aligned}
$$

(1)式は目的関数であり，フロー費用とデザイン費用の総和を最小化する．(2)式はフロー保存式である．ここで，d_n^kは，ノードnが品種kの始点O^kであれば$-d^k$，終点D^kであればd^k，それ以外のノードであれば0である定数である．(3)式は，アーク（i, j）が存在するとき，アーク上のフロー量の合計がアーク容量以下であることを表す容量制約式である．アークは向きをもたないので，アーク（i, j）上にはiからj方向のフローとjからi方向のフローが存在する．(4)式は，アーク（i, j）が存在するとき，品種kのフローが最大でd^kだけ存在することを表す強制制約式である．$d^k > C_{ij}$である品種の需要が存在する場合，この制約式の右辺は$\min(d^k, C_{ij})\,y_{ij}$に置き換えることができる．

3　妥当不等式

強制制約式を含む定式化であっても最適値と下界値とのギャップは比較的大きく，線形緩和によって得られる下界値はそれほど良くはない．そのため，*CND*に対して多くの妥当不等式が示されており，これらの妥当不等式を制約として加えることによって，下界値を改善することができる．ここでは，向きのない容量をもつアークを想定する．

容量制約をもつネットワーク設計問題に対して，多くの妥当不等式が提案されている．Magnanti et al.（1993）やKatayama and Kasugai（1993）は，カットセット上のフローと容量に対する切り上げを用いたカットセット不等式を示している．Magnanti et al.（1993）は，カットセット不等式に加え，3ノードに対するカットセット不等式および剰余容量不等式を提案している．Chouman et al.（2003）は，最小基数不等式，被覆不等式とそれらの持ち上げた不等式を示し，分離問題と生成方法を示している．

Chouman and Crainic（2011）は，フロー被覆不等式，フローパック不等式とそれらの生成方法を示している．Agarwal (2006) やAgarwal (2014) は，サバイバルネットワーク設計問題に対する 3 および 4 分割不等式を示している．

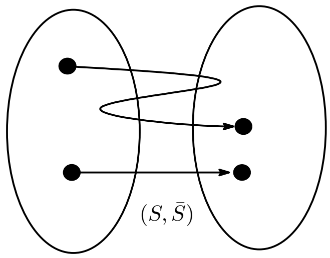

図１　カットセット不等式

３．１　カットセット不等式

カットセット上のアーク容量とフロー量の関係から妥当不等式を導くことができる．ノード集合 N を S と $\bar{S}$（$= N \setminus S$）に分割する．S 内のノードと $\bar{S}$ 内のノードを端点とするアーク集合であるカットセット（$S, \bar{S}$）とおく．また，S に含まれるノードと $\bar{S}$ に含まれるノードを始点と終点または終点と始点とする品種の集合を $K(S, \bar{S})$ とし，これらの品種の需要量の和を $D_{(S,\bar{S})}$（$=\sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k$）とおく．

このとき，K（$S, \bar{S}$）に含まれる品種のフローは，カットセット（$S, \bar{S}$）に含まれるアーク上を少なくとも 1 回は通過しなければならない（図１）．さらに，（$S, \bar{S}$）上には，カットセット上を通過するフロー量以上の容量が必要であるので，次式が成り立つ．

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} C_{ij} y_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} \sum_{k\in K(S,\bar{S})} (x_{ij}^k + x_{ji}^k) \geq D_{(S,\bar{S})} \quad \forall S \subset N$$

カットセット（$S, \bar{S}$）に含まれるアークのアーク容量の最大値を $C_{(S,\bar{S})}$（$=\max_{(i,j)\in(S,\bar{S})} C_{ij}$）とおく．

両辺を $C_{(S,\bar{S})}$ で割ると，次の関係が成り立つ．

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} \frac{C_{ij}}{C_{(S,\bar{S})}} y_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} \sum_{k\in K(S,\bar{S})} \frac{(x_{ij}^k + x_{ji}^k)}{C_{(S,\bar{S})}} \geq \frac{D_{(S,\bar{S})}}{C_{(S,\bar{S})}} \quad \forall S \subset N$$

左辺は整数値をとるため，次のカットセット不等式（Chouman et al. 2003）は妥当不等式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{D_{(S,\bar{S})}}{C_{(S,\bar{S})}} \right\rceil \quad \forall S \subset N$$

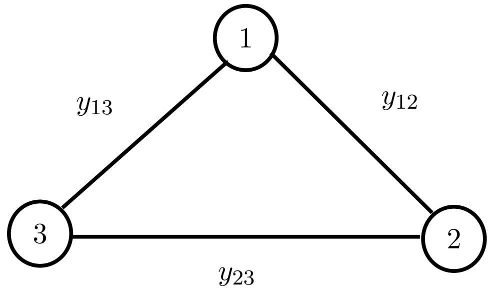

図２　３ノードネットワーク

３．２　３ノード不等式

３ノードと各ノードを端点とする３アークをもち，各ノードを始点・終点とする３品種から構成される３ノードのネットワークを考える（図２）．このネットワークにおけるカットセット不等式（Magnanti et al. 1993）は，次の３つの式となる．

$$y_{12}+y_{13} \geq \left\lceil \frac{d^{12}+d^{13}}{\max(C_{12},C_{13})} \right\rceil, \quad y_{12}+y_{23} \geq \left\lceil \frac{d^{12}+d^{23}}{\max(C_{12},C_{23})} \right\rceil,$$

$$y_{13}+y_{23} \geq \left\lceil \frac{d^{13}+d^{23}}{\max(C_{13},C_{23})} \right\rceil$$

これら３式の和を２で割ることによって，次の３ノード不等式を導くことができる．

$$y_{12}+y_{13}+y_{23} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{d^{12}+d^{13}}{\max(C_{12},C_{13})} \right\rceil + \left\lceil \frac{d^{12}+d^{23}}{\max(C_{12},C_{23})} \right\rceil + \left\lceil \frac{d^{13}+d^{23}}{\max(C_{13},C_{23})} \right\rceil \right) \right\rceil$$

この妥当不等式は，$\lceil (d^{12}+d^{13})/\max(C_{12}, C_{13}) \rceil + \lceil (d^{12}+d^{23})/\max(C_{12}, C_{13}) \rceil + \lceil (d^{12}+d^{23})/\max(C_{12}, C_{13}) \rceil$が奇数であれば，有効な妥当不等式となる．

３．３　最小基数不等式

カットセット（$S, \bar{S}$）に対する最小基数 $m_{(S,\bar{S})}$ を次のように定義する．

$$m_{(S,\bar{S})} = \max\{h| \sum_{l=1}^{h} C_l < \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k\} + 1$$

ここで，$C_1, \cdots, C_{|(S,\bar{S})|}$はカットセット（$S, \bar{S}$）上のアーク容量を降順にソートしたものであり，$\sum_{l=1}^{h} C_l$ は容量の降順で h 番目までのアーク容量の和をとったものである．このためカットセット（$S, \bar{S}$）上には少なくとも $m_{(S,\bar{S})}$ 本のアークが必要であり，$m_{(S,\bar{S})}$ は（$S, \bar{S}$）の中で選択すべきアーク数の最小値となる（図３）．

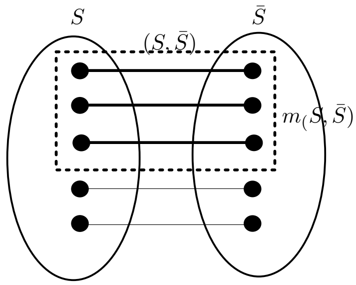

図３　最小基数

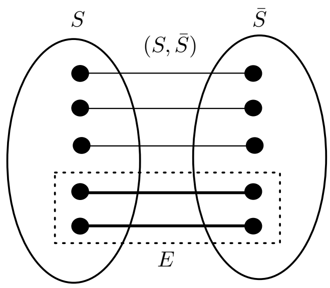

図４　カットセットと被覆

したがって，次式の最小基数不等式（Chouman et al. 2003）は妥当不等式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} \geq m_{(S,\bar{S})}$$

３．４　被覆不等式

E をカットセット（$S, \bar{S}$）の部分集合とする（図４）．カットセット（$S, \bar{S}$）から E を除いたアーク集合（$S, \bar{S}$）$\setminus E$ 上で，$K(S, \bar{S}$）のすべての需要を流せない，すなわち

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})\setminus E} C_{ij} < D_{(S,\bar{S})}$$

であるとき，E を（$S, \bar{S}$）の被覆とよぶ．このとき，被覆に含まれるアークの少なくとも１本以上が選択されないと，フローを流せないために実行不可能となる．

また，E に含まれるアーク容量の最小値のアークを加えたときに，$K(S, \bar{S}$）のすべての需要を流せる，すなわち

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})\setminus E} C_{ij} + \min_{(p,q)\in E} C_{pq} \geq D_{(S,\bar{S})}$$

であるとき，E を（$S, \bar{S}$）の最小被覆とよぶ．

（$S, \bar{S}$）のすべての被覆 E に対して，少なくとも被覆に含まれるアーク1本は選択しなければならないことから，次の被覆不等式（Chouman et al. 2003）は妥当不等式となる．

$$\sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \geq 1$$

デザイン変数の線形緩和解 y が与えられているものとする．次の分離問題を解くことによって，*CND* の線形緩和解を満足しない可能性のある被覆を見つけることができる．

$$\begin{aligned} \phi = \text{最小化} \quad & \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} t_{ij} \\ \text{条件} \quad & \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} C_{ij} t_{ij} > \sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} C_{ij} - D_{(S,\bar{S})} \\ & t_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in (S,\bar{S}) \end{aligned}$$

ここで，ϕ はこの分離問題の最適値であり，t_{ij} はアーク（i, j）が被覆 E に含まれれば1，そうでなければ0であることを表す0−1変数である．もし，$\phi<1$ であれば E は最も緩和解を満足しない被覆となり，$\phi<1$ であれば緩和解を満足しない被覆が存在しない．

この分離問題は0−1ナップサック問題であり，比較的容易に最適解を求めることができる．しかし，膨大な数のカットセットに対する分離問題を解くためには，より効率的に解くことが必要となる．そこで，y_{ij} を昇順に並べ換え，昇順に制約を満たすまで貪欲的に $t_{ij}=1$ とすることで近似解を求めると，効率的に被覆 E を求めることができる．

4　n 分割不等式

4．1　3分割不等式

3ノード不等式は，一般のネットワークに拡張できる．ノード集合 N を S_1，S_2，S_3 に3分割し，3ノードネットワーク上のアークをカットセットに対応させる（図5）．このとき，カットセット（$S_1, \bar{S}_1$），（$S_2, \bar{S}_2$），（$S_3, \bar{S}_3$）に対するカットセット不等式は次式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S_1,\bar{S}_1)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{D_{(S_1,\bar{S}_1)}}{C_{(S_1,\bar{S}_1)}} \right\rceil, \quad \sum_{(i,j)\in(S_2,\bar{S}_2)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{D_{(S_2,\bar{S}_2)}}{C_{(S_2,\bar{S}_2)}} \right\rceil, \quad \sum_{(i,j)\in(S_3,\bar{S}_3)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{D_{(S_3,\bar{S}_3)}}{C_{(S_3,\bar{S}_3)}} \right\rceil,$$

3つの式の和をとると左辺には同じデザイン変数が2つずつ含まれ，（$S_1, \bar{S}_1$）=（S_1，$S_2 \cup S_3$）などとなることから，次の3分割不等式を導くことができる．

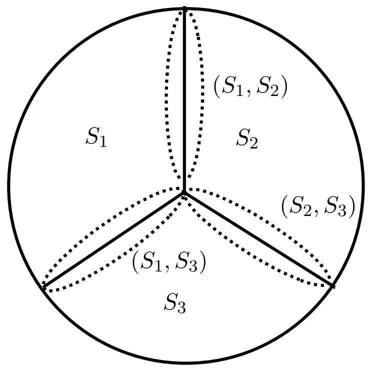

図５　３分割ネットワーク

$$\sum_{(i,j)\in(S_1,S_2)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(S_1,S_3)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(S_2,S_3)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\left(\left\lceil \frac{D_{(S_1,\bar{S}_1)}}{C_{(S_1,\bar{S}_1)}} \right\rceil + \left\lceil \frac{D_{(S_2,\bar{S}_2)}}{C_{(S_2,\bar{S}_2)}} \right\rceil + \left\lceil \frac{D_{(S_3,\bar{S}_3)}}{C_{(S_3,\bar{S}_3)}} \right\rceil \right) \right\rceil$$

この妥当不等式は，$\lceil D_{(S_1,\bar{S}_1)}/C_{(S_1,\bar{S}_1)}\rceil + \lceil D_{(S_2,\bar{S}_2)}/C_{(S_2,\bar{S}_2)}\rceil + \lceil D_{(S_3,\bar{S}_3)}/C_{(S_3,\bar{S}_3)}\rceil$ が奇数であれば，有効な妥当不等式となる．

４．２　４分割不等式とn 分割不等式

３分割不等式は，４分割不等式に拡張できる．ノード集合 N を S_1 から S_4 に４分割する（図６）．このとき，カットセット $(S_p, \bar{S}_p)$ に対するカットセット不等式は次式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S_p,\bar{S}_p)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{D_{(S_p,\bar{S}_p)}}{C_{(S_p,\bar{S}_p)}} \right\rceil, \quad \forall p = 1,2,3,4$$

したがって，次の４分割不等式は妥当不等式となる．

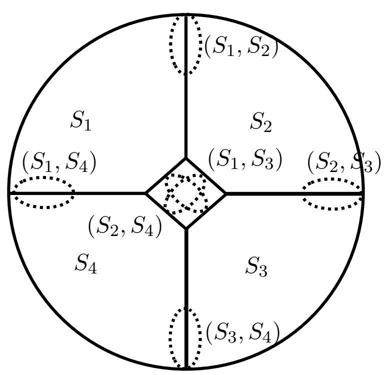

図６　４分割ネットワーク

$$\sum_{p=1}^{3}\sum_{q=p+1}^{4}\sum_{(i,j)\in(S_p,S_q)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{4}\left\lceil \frac{D_{(S_p,\bar{S}_p)}}{C_{(S_p,\bar{S}_p)}} \right\rceil \right\rceil$$

ノード集合 N を S_1 から S_n に n 個に分割する．このとき，次の n 分割不等式は妥当不等式となる．

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}\sum_{(i,j)\in(S_p,S_q)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\left\lceil \frac{D_{(S_p,\bar{S}_p)}}{C_{(S_p,\bar{S}_p)}} \right\rceil \right\rceil$$

n 分割不等式は，$\sum_{p=1}^{n}\lceil D_{(S_p,\bar{S}_p)}/C_{(S_p,\bar{S}_p)}\rceil$ が奇数であれば，有効な妥当不等式となる．

5　3 分割最小基数不等式と n 分割最小基数不等式

n 分割不等式と同様に，最小基数不等式を 3 分割不等式に拡張することができる．ノード集合 N を S_1，S_2，S_3 に 3 分割する．また，カットセット $(S, \bar{S})$ 上の最小基数を $m_{(S,\bar{S})}$ とする．このとき，カットセット $(S_1, \bar{S}_1)$，$(S_2, \bar{S}_2)$，$(S_3, \bar{S}_3)$ に対する最小基数不等式は次式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S_1,\bar{S}_1)} y_{ij} \geq m_{(S_1,\bar{S}_1)}, \quad \sum_{(i,j)\in(S_2,\bar{S}_2)} y_{ij} \geq m_{(S_2,\bar{S}_2)}, \quad \sum_{(i,j)\in(S_3,\bar{S}_3)} y_{ij} \geq m_{(S_3,\bar{S}_3)}$$

これらの式から，次の 3 分割最小基数不等式は妥当不等式となる．

$$\sum_{(i,j)\in(S_1,S_2)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(S_1,S_3)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(S_2,S_3)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\left(m_{(S_1,\bar{S}_1)} + m_{(S_2,\bar{S}_2)} + m_{(S_3,\bar{S}_3)}\right) \right\rceil$$

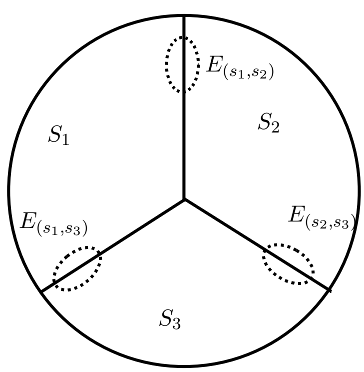

図 7　3 分割被覆

同様に，次の n 分割最小基数不等式は妥当不等式となる．

$$\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{q=p+1}^{n}\sum_{(i,j)\in(S_p,S_q)} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} m_{(S_p,\bar{S}_p)} \right\rceil$$

n 分最小基数割不等式は，$\sum_{p=1}^{n} m_{(S_p,\bar{S}_p)}$が奇数であれば，有効な妥当不等式となる．

6　3 分割被覆不等式と n 分割被覆不等式

ノード集合 N を S_1，S_2，S_3 に 3 分割する．カットセット（S_p, S_q）の部分集合を $E_{(S_p,S_q)}$ とする（図 7 ）．ただし，$E_{(S_p,S_q)} \cup E_{(S_p,S_r)}$ がカットセット（S_p, $S_q \cup S_r$）の被覆であるものとする．

このとき，被覆不等式は次のようになる．

$$\sum_{(i,j)\in E_{(S_1,S_2)}\cup E_{(S_1,S_3)}} y_{ij} \geq 1, \qquad \sum_{(i,j)\in E_{(S_1,S_2)}\cup E_{(S_2,S_3)}} y_{ij} \geq 1, \qquad \sum_{(i,j)\in E_{(S_1,S_3)}\cup E_{(S_2,S_3)}} y_{ij} \geq 1$$

$E_{(S_p,S_q)} \cup E_{(S_p,S_r)} = E_{(S_p,\bar{S}_p)}$ より，次の 3 分割被覆不等式を導くことができる．

$$\sum_{(i,j)\in E_{(S_1,\bar{S}_1)}} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in E_{(S_2,\bar{S}_2)}} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in E_{(S_3,\bar{S}_3)}} y_{ij} \geq 2$$

ノード集合 N を S_1 から S_n に n 個に分割する．カットセット（S_p, S_q）の部分集合 $E_{(S_p,S_q)}$ において，$\cup_{p=1,\,p\neq q}^{n} E_{(S_p,S_q)}$ がカットセット（S_p, $\bar{S}_p$）の被覆であるものとする．

3 分割被覆不等式と同様に，次の n 分割被覆不等式は妥当不等式となる．

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{(i,j)\in E_{(S_p,\bar{S}_p)}} y_{ij} \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

n 分割被覆不等式は，n が奇数であれば，有効な妥当不等式となる．

7　おわりに

本論文では，向きのないアークを含む容量制約をもつネットワーク設計問題に対する 3・4 および n 分割不等式，3 および n 最小基数不等式，ならびに 3 および n 被覆不等式を提案した．本研究では，向きのないアークをもつ問題を対象とし，妥当不等式を示したにとどまっている．今後，向きのあるアークをもつ問題がより一般的であるため，向きのあるアークをもつ問題への拡張が必要である．また，提案した妥当不等式を問題へ追加した場合の有効性や分枝カット法への組み込みが必要である．

本研究は科学研究費基盤研究C（課題番号25350454）による成果の一部である．

参考文献

Agarwal, Y. 2006. k-partition-based facets of the network design problem. *Networks* 47 123-139.

Agarwal, Y. 2014. Design of survivable networks using three- and four-partition facets. *Operations Research* 61 199-213.

Chouman, M., T. G. Crainic. 2011. Commodity representations and cutset-based inequalities for multicommodity capacitated fixed-change network design. Tech. Rep. CIRRELT-2011-56, Centre de recherche sur les transports,Université de Montréal.

Chouman, M., T. G. Crainic, B. Gendron. 2003. A cutting-plane algorithm based on cut-set inequalities for multicommodity capacitated xed charge network design. Tech. Rep. CIRRELT-2003-16, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Katayama, N., H. Kasugai. 1993. A capacitated multi-commodity network design problem -a solution method for finding a lower bound using valid inequalities. *Journal of Japan Industrial Management Association* 44 164-175.

Magnanti, T. L., P. Mirchandani, R. Vachani. 1993. The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming* 60 233-250.