分割妥当不等式を用いた容量制約をもつネットワークデザイン問題のLagrange緩和法

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワークデザイン問題は,多品種フローを含むネットワークにおいて,適切なネットワークの形状を求める問題であり，通信ネットワーク設計，交通ネットワーク設計や輸送・配送ネットワーク設計などに様々な応用分野が存在している。交換機，コンピュータ，交差点，交通需要・発生吸収点，配送センターや消費地などをノード，通信回線，道路や輸送経路などのノード間をつなぐものをアークとし，呼，データ，自動車や荷物などのノード間を流れるものを品種のフローと表現する。ネットワークデザイン問題は，アークに関するデザイン費用ともの流れに伴うルーティング費用を考慮して，適切なアークを選択し，各品種のフローの経路を求める問題と定義される。これらに加え，現実的な問題では通信回線の容量，道路の交通容量や輸送能力のように，アークは単位時間当たりの処理能力に制限をもつ場合が多く，これらの処理能力を考慮した問題は容量制約をもつネットワークデザイン問題(capacitated network design problem, *CND*)とよばれている。

CND は部分問題としてタイトな容量制約をもつ多品種フロー問題を含むため，容量制約をもたないネットワークデザイン問題に比べると大変難しい問題であることが知られている[1]。この問題に対して，強い妥当不等式を生成して制約式として付加し，下界値を改善する手法が提案されている。片山－春日井[10]は2分割妥当不等式を逐次生成して双対問題に付加し，この制約に対する双対上昇法を示している。また，片山－春日井[9]はフロー迂回条件を用いた妥当不等式を提案している。Magnanti-Mirchandani[8]は，ネットワークローディング問題に対する3分割妥当不等式とアーク剰余容量不等式を示

している。Bienstock-Günlük[2]は *CND* に対する多面体解析を行い，Günlük[7]はそれらを利用した Branch-Cut 法を提案している。

一方，Lagrange 緩和などを用いた緩和法を用いた解法も提案されている。片山－春日井[10]は，双対上昇法との比較の中で，フロー保存条件に対する Lagrange 緩和法を示している。Gendron-Crainic[3][4][5]および Gendron-Crainic-Frangioni[6]は，連続緩和，フロー保存条件 Lagrange 緩和，容量制約 Lagrange 緩和とそれらの解法を示しいる。

本研究では，容量制約をもつネットワークデザイン問題に対する分割妥当不等式の一般形を示し，分割妥当不等式に対する Lagrange 緩和問題および Lagrange 乗数の効率的な調整法を提案する。

2　問題の定式化と分割妥当不等式

ノード集合を N，向きのないアーク候補集合を A，品種の集合を K と表す。一般的に品種はものの種類を表すが，ここでは始点と終点の組合せが異なるものを異なる品種と定義する。アーク(i,j)を設置するか否かを表すデザイン変数を y_{ij}とし，品種 k の起点・終点間のフローがアーク上をノード i から j へ流れる比率を表すフロー変数を x_{ij}^k とする。すべてのアークの容量は同一とし，C で表す。アーク(i,j)のデザイン費用を f_{ij}，品種 k の全需要を流したときの非負のルーティング費用を c_{ij}^k とする。品種 k の始点を O^k，終点を D^k，OD フロー量を d^k とする。このとき，*CND* の定式化は，次のように表される。

$$(CND)\text{最小化}\quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}(c_{ij}^k x_{ij}^k + c_{ji}^k x_{ji}^k) + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} \tag{1}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{i\in N} x_{in}^k - \sum_{j\in N} x_{nj}^k = \begin{cases} -1 & if\ n = O^k \\ 1 & if\ n = D^k \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad for\ all\ n\in N,\ k\in K \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K} d^k (x_{ij}^k + x_{ji}^k) \le C y_{ij} \quad for\ all\ (i,j)\in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^k + x_{ji}^k \le y_{ij} \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{4}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad for\ all\ (i,j)\in A \tag{5}$$

$$0\le x_{ij}^k \le 1, 0\le x_{ji}^k \le 1 \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{6}$$

(1)式は，ルーティング費用とデザイン費用の総和の最小化を表す。(2)式はフロー保存式である。(3)式は，アーク(i,j)が存在するときにのみフローの存在を許し，かつそのアークのフロー量は容量以下であることを表す。(4)式は，品種 k がアーク(i,j)上を流れる比率の和がアーク(i,j)が存在するときに最大 1，存在しないとき 0 であることを表す。一般に同一品種のフローが同一のアーク上を逆流することは最適ではないため，

(3)式と(4)式は妥当な制約式となる。(5)式はデザイン変数の0-1条件，(6)式はフロー変数の比率が最大1であることを表す。

ノードをいくつかに分割し，各ノード集合間のアークに関する妥当不等式が示されており，ここではそれらを総称して分割妥当不等式とよぶ。N を N_1 と $N_2(=N\backslash N_1)$ に分割し，2つのノード集合の一方を始点，他方を終点とする品種の集合を $K(N_1, N_2)$ とおく。このとき，$K(N_1, N_2)$ に含まれる品種は，カット (N_1, N_2) に含まれるアーク上を少なくとも1度以上は通過しなければならない。このため，次の式が成り立つ。

$$\sum_{(i,j)\in(N_1,N_2)} Cy_{ij} \geq \sum_{(i,j)\in(N_1,N_2)} \sum_{k\in K(N_1,N_2)} d^k(x_{ij}^k + x_{ji}^k) \geq \sum_{k\in K(N_1,N_2)} d^k$$

右辺と左辺を C で割ると，左辺の整数性より，右辺を切り上げても不等式が成立する。このため，カット (N_1, N_2) 上の容量の合計と $K(N_1, N_2)$ に含まれる品種のODフロー量の合計の関係を表わす次の2分割妥当不等式は，問題 CND の妥当不等式となる。

$$\sum_{(i,j)\in(N_1,N_2)} y_{ij} \geq \lceil \sum_{k\in K(N_1,N_2)} d^k/C\rceil \quad for\ all\ N_1 \subset N, N_2 = N\backslash N_1 \tag{7}$$

次に，ノード集合 N を N_1，N_2，N_3 に3分割する。このとき，次のような3つの2分割妥当不等式が成立する。

$$\sum_{(i,j)\in(N_1,N_2\cup N_3)} y_{ij} \geq \lceil \sum_{k\in K(N_1,N_2\cup N_3)} d^k/C\rceil$$

$$\sum_{(i,j)\in(N_2,N_1\cup N_3)} y_{ij} \geq \lceil \sum_{k\in K(N_2,N_1\cup N_3)} d^k/C\rceil$$

$$\sum_{(i,j)\in(N_3,N_1\cup N_2)} y_{ij} \geq \lceil \sum_{k\in K(N_3,N_1\cup N_2)} d^k/C\rceil$$

これら3式の和から，次の妥当な3分割妥当不等式[8]を導くことができる。

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,j)\in(N_1,N_2\cup N_3)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(N_2,N_1\cup N_3)} y_{ij} + \sum_{(i,j)\in(N_3,N_1\cup N_2)} y_{ij} \geq \\ &\left\lceil \frac{1}{2}\left(\lceil \sum_{k\in K(N_1,N_2\cup N_3)} d^k/C\rceil + \lceil \sum_{k\in K(N_2,N_1\cup N_3)} d^k/C\rceil + \lceil \sum_{k\in K(N_3,N_1\cup N_2)} d^k/C\rceil\right)\right\rceil \\ &\qquad for\ all\ N_1 \subset N,\ N_2 \subset N, N_1 \cap N_2 = \phi, N_3 = N\backslash(N_1 \cup N_2)\end{aligned} \tag{8}$$

一方，$K(N_1,N_3)$ に含まれる品種のフロー量の合計が部分カット (N_1,N_3) 上に設置されたアークの容量を超える場合，あふれたフローは (N_1,N_2) および (N_2,N_3) 上を迂回する必要があり，そのフローはこれら $(N_1\cup N_3,N_2)$ 上を2回以上通過することになり，次の妥当な3分割妥当不等式[9]を得る。

$$\begin{aligned}&\sum_{(i,j)\in(N_1\cup N_3,N_2)} y_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in(N_1,N_3)} y_{ij} \geq \lceil(\sum_{k\in K(N_1\cup N_3,N_2)} d^k + 2\sum_{k\in K(N_1,N_3)} d^k)/C\rceil \\ &\qquad for\ all\ N_1 \subset N,\ N_2 \subset N, N_1 \cap N_2 = \phi, N_3 = N\backslash(N_1 \cup N_2)\end{aligned} \tag{9}$$

(7)，(8)や(9)式のような分割妥当不等式では，左辺は正の整数の係数をもつデザイ

ン変数の和であり，右辺は正の整数の定数となる。そこで，適当な分割妥当不等式の集合を M，分割妥当不等式 m の左辺に含まれるアークの集合を A_m，m の左辺の定数を E_m，m のアーク (i,j) の正の係数を a_{ij}^m とすれば，分割妥当不等式の一般形は次のように表現することができる。

$$\sum_{(i,j)\in A_m} a_{ij}^m y_{ij} \geq E_m \quad for\ all\ m \in M \tag{10}$$

3 Lagrange 緩和問題

(10)式を CND の制約条件に加え，(2)式の n，k に対する乗数を v_n^k，(10)式の m に対する非負の乗数を u_m とした Lagrange 緩和問題 LR を作成する。この LR の最適値は，問題 CND の下界値となる。

(LR)最小化 $\displaystyle \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\{(c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k)x_{ij}^k + (c_{ji}^k - v_i^k + v_j^k)x_{ji}^k\}$

$\displaystyle + \sum_{(i,j)\in A}(f_{ij} - \sum_{m\subset M_{ij}} a_{ij}^m u_m)y_{ij} + \sum_{m\in M} E_m u_m + \sum_{k\in K}(v_{D^K}^k - v_{O^K}^k)$

条件 (3)，(4)，(5)，(6)式

ここで，M_{ij} は M の部分集合で，アーク (i,j) を含む分割妥当不等式の集合である。

問題 LR の目的関数の第3項と第4項は制約条件に無関係であるので，問題 LR はアーク (i,j) 毎の $|A|$ 個の問題 LR_{ij} に分割できる。

(LR_{ij})最小化 $\displaystyle \sum_{k\in K}\{(c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k)x_{ij}^k + (c_{ji}^k - v_i^k + v_j^k)x_{ji}^k\} + (f_{ij} - \sum_{m\subset M_{ij}} a_{ij}^m u_m)y_{ij}$

条件 $\displaystyle \sum_{k\in K} d^k(x_{ij}^k + x_{ji}^k) \leq C y_{ij}$

$0 \leq x_{ij}^k + x_{ji}^k \leq y_{ij} \quad for\ all\ k \in K$

$y_{ij} \in \{0,1\}$

$0 \leq x_{ij}^k \leq 1, 0 \leq x_{ji}^k \leq 1 \quad for\ all\ k \in K$

$y_{ij} = 1$ の場合，Lagrange 乗数 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ が与えられたときに，一般にこの問題は x_{ij}^k と x_{ji}^k のどちらか一方が0である条件をもつ連続ナップサック問題となるため，容易に解くことができる。そこで，この連続ナップサック問題の最適解を $\tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$, $\tilde{x}_{ji}^k(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)$ $(\forall k \in K)$ とおく。$\tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)$, $\tilde{x}_{ji}^k(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)$ は，$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$ に依存し，u_m とは無関係に決まることに注意する。一方，$y_{ij} = 0$ の場合は，$x_{ij}^k = x_{ji}^k = 0 (\forall k \in K)$ が最適解となる。

結局，問題 LR_{ij} の最適解は次のように表すことができる。

$$y_{ij}^* = \begin{cases} 1 & if\ \sum_{k\in K}\{(c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k)\tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) + (c_{ji}^k - v_i^k + v_j^k)\tilde{x}_{ji}^k(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)\} + f_{ij} - \sum_{m\subset M_{ij}} a_{ij}^m u_m \le 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x_{ij}^{*k} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) & if\ y_{ij}^* = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$x_{ij}^{*k} = \begin{cases} \tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) & if\ y_{ij}^* = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

u_m が与えられたときに，問題 LR の最適値 ϕ は最適解 y^* と x^* を用いることなく次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi &= \sum_{(i,j)\in A} \min\Big[\sum_{k\in K}\{(c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k)\tilde{x}_{ij}^k(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) + (c_{ji}^k - v_i^k + v_j^k)\tilde{x}_{ji}^k(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_i)\} + f_{ij} - \sum_{m\subset M_{ij}} a_{ij}^m u_m, 0\Big] \\ &\quad + \sum_{m\in M} E_m u_m + \sum_{k\in K}(v_{D^k}^k - v_{O^k}^k) \end{aligned}$$

4 Lagrange 乗数調整法

Lagrange 乗数 $\boldsymbol{v}$ に対しては，劣勾配法などが適用できる。一方，(10)式の分割妥当不等式は指数個存在するために，乗数 u_m も指数個存在する。このため，あらかじめ全ての分割妥当不等式を列挙しておくのではなく，分割妥当不等式を制約として含まない緩和問題から始め，逐次，緩和解を満足しない分割妥当不等式を探索・生成することが必要である。この生成した分割妥当不等式を制約条件に追加し，目的関数値 ϕ が上昇するように，追加した分割妥当不等式に対する Lagrange 乗数の値を設定していくことにする。

劣勾配法などによって得られている適当な $\tilde{\boldsymbol{v}}$ と，すでに生成された分割妥当不等式集合 $\tilde{M}$ に対する Lagnrange 乗数 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ が与えられているものとする。新たに生成された分割妥当不等式 m を制約条件として追加し，乗数 u_m を用いて Lagrange 緩和した問題を LR_m とおく。

ここで，

$$\alpha_{ij} = \sum_{k\in K}\{(c_{ij}^k - \tilde{v}_j^k + \tilde{v}_i^k)\tilde{x}_{ij}^k(\tilde{\boldsymbol{v}}_i, \tilde{\boldsymbol{v}}_j) + (c_{ji}^k - \tilde{v}_i^k + \tilde{v}_j^k)\tilde{x}_{ji}^k(\tilde{\boldsymbol{v}}_j, \tilde{\boldsymbol{v}}_i)\} + f_{ij} - \sum_{m'\subset \tilde{M}_{ij}} a_{ij}^{m'}\tilde{u}_{m'}$$

とおく。$\tilde{\boldsymbol{v}}$ と $\tilde{\boldsymbol{u}}$ が与えられているので，α_{ij} は定数として扱うことができる。さらに，生成された分割妥当不等式の集合のうちアーク (i, j) を含む集合を $\tilde{M}_{ij}$ とする。問題 LR_m の最適値を $\phi_m(u_m)$ とおくと，$\phi_m(u_m)$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi_m(u_m) &= \sum_{(i,j)\in A_m} \min\{\alpha_{ij} - a_{ij}^m u_m, 0\} + E_m u_m + \sum_{(i,j)\in A\setminus A_m} \alpha_{ij} \\ &\quad + \sum_{m'\in \tilde{M}_{ij}} E_{A_{m'}}\tilde{u}_{m'} + \sum_{k\in K}(\tilde{v}_{D^K}^k - \tilde{v}_{O^K}^k) \end{aligned}$$

この式の第3項，第4項と第5項は定数項として扱うことができる。したがって，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ と $\tilde{\boldsymbol{u}}$ が与えられたときに，*CND* の下界値である $\phi_m(u_m)$を最大にする u_m の値を定めるためには，u_m に関する次の問題 LRu_m を解けば良いことになる。

$$(LRu_m)\ \underset{u_m \geq 0}{\text{最大化}} \quad \sum_{(i,j)\in A_m} \min\{\alpha_{ij} - a_{ij}^m u_m, 0\} + E_m u_m$$

問題 LRu_m は1変数の区分的線形問題であるため，$\alpha_{ij} - a_{ij}^m u_m = 0$ を満足する非負の u_m が区分点となり，LRu_m の最適解の候補となる。このため，$u_m \geq 0$，すなわち $\alpha_{ij} \geq 0$ について，α_{ij}/a_{ij}^m の値を昇順にソートし，この順に u_m の値を0から増加させ，目的関数値が正で最大となる最小の u_m を求めれば良いことが分かる。

問題 LRu_m の実行可能解を $\tilde{u}_m$ とおく。このとき u_m の値を0から $\tilde{u}_m$ に変化させたときの $\phi_m(u_m)$の変化量 $\Delta\phi_m(\tilde{u}_m)$は，次のようになる。

$$\begin{aligned}\Delta\phi_m(\tilde{u}_m) &= \sum_{(i,j)\in A_m} \min\{\alpha_{ij} - a_{ij}^m \tilde{u}_m, 0\} + E_m \tilde{u}_m - \sum_{(i,j)\in A_m} \min\{\alpha_{ij}, 0\} \\ &= -\sum_{(i,j)\in A_m^1} a_{ij}^m \tilde{u}_m + \sum_{(i,j)\in A_m^2} (\alpha_{ij} - a_{ij}^m \tilde{u}_m) + E_m \tilde{u}_m\end{aligned}$$

ここで，A_m^1は A_m に含まれる $\alpha_{ij} \leq 0$ であるアークの集合，A_m^2は A_m に含まれる $0 < \alpha_{ij} \leq a_{ij}^m \tilde{u}_m$ であるアークの集合である。

一方，問題 *LR* の最適解 $\boldsymbol{y}^*$ を用いて，$\Delta\phi_m(\tilde{u}_m)$を表すことができる。$\alpha_{ij} - a_{ij}^m \tilde{u}_m \leq 0$ となるアークでは $y_{ij}^* = 1$ が緩和解の最適値となるので，$y_{ij}^* = 1\,(\forall(i,j)\in A_m^1 \cup A_m^2)$，$y_{ij}^* = 0\,(\forall(i,j)\in A\setminus(A_m^1 \cup A_m^2))$ である。このため，

$$\begin{aligned}\Delta\phi_m(\tilde{u}_m) &= -\sum_{(i,j)\in A_m^1} a_{ij}^m \tilde{u}_m y_{ij}^* - \sum_{(i,j)\in A_m^2} (\alpha_{ij} - a_{ij}^m \tilde{u}_m) y_{ij}^* + E_m \tilde{u}_m \\ &= -\sum_{(i,j)\in A_m^1} a_{ij}^m \tilde{u}_m y_{ij}^* - \sum_{(i,j)\in A_m^2} a_{ij}^m \tilde{u}_m y_{ij}^* - \sum_{(i,j)\in A\setminus(A_m^1\cup A_m^2)} a_{ij}^m \tilde{u}_m y_{ij}^* + \sum_{(i,j)\in A_m^2} \alpha_{ij} + E_m \tilde{u}_m \\ &= (E_m - \sum_{(i,j)\in A} a_{ij}^m y_{ij}^*)\tilde{u}_m + \sum_{(i,j)\in A_m^2} \alpha_{ij} \qquad (11)\end{aligned}$$

となる。(11) 式の第1項は $\tilde{u}_m$ に対する相補性条件になる。また，第2項は u_m の値を0から $\tilde{u}_m$ に増加させたときに，$y_{ij}^* = 0$ から $y_{ij}^* = 1$ に変化するアーク(i, j)の α_{ij} の合計値である。

現在の緩和解を満足しない分割妥当不等式を追加したときの Lagrange 乗数調整法を示したが，一通り分割妥当不等式を列挙して $\boldsymbol{u}$ を設定し終わった後に，再度，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ に対して劣勾配法を適用すれば，さらに下界値を改善することが期待できる。

5 数値例

分割妥当不等式 $\boldsymbol{m}$ を $y_{13} + y_{14} + y_{15} + 2y_{23} + 2y_{24} + 2y_{25} \geq 4$ とする。$a_{13}^m = a_{14}^m = a_{15}^m = 1$,

$a_{23}^m = a_{24}^m = a_{25}^m = 2$，$E_m = 4$である。また，現在まで生成された分割妥当不等式はないものとし，

$\alpha_{13} = \sum_{k \in K} \{ (c_{13}^k - v_3^k + v_1^k) \tilde{x}_{13}^k (v_1, v_3) + \{ (c_{31}^k - v_1^k + v_3^k) \tilde{x}_{31}^k (v_3, v_1) \} + f_{13} = -10$,
$\alpha_{14} = -4$，$\alpha_{15} = 1$，$\alpha_{23} = 4$，$\alpha_{24} = 8$，$\alpha_{25} = 10$とする。現在のLagrange緩和解は，$y_{13} = y_{14} = 1$，$y_{15} = y_{23} = y_{24} = y_{25} = 0$となる。

u_mを求めるためには，次の問題LRu_mを解けばよい。

$$\begin{aligned} \underset{u_m \geq 0}{\text{最大化}} \ & \min\{-10 - u_m, 0\} + \min\{-4 - u_m, 0\} + \min\{1 - u_m, 0\} + \min\{4 - 2u_m, 0\} \\ & + \min\{8 - 2u_m, 0\} + \min\{10 - 2u_m, 0\} + 4u_m \end{aligned}$$

この問題におけるu_mの区分点は1, 2, 4, 5である。$u_m = 1$のとき$\Delta\phi_m(u_m) = -1 \times 2 + 4 \times 1 = 2$，$u_m = 2$のとき$\Delta\phi_m(u_m) = -2 \times 2 - 1 + 4 \times 2 = 3$，$u_m = 4$のとき$\Delta\phi_m(u_m) = -4 \times 2 - 3 - 4 + 4 \times 4 = 1$，$u_m = 5$のとき$\Delta\phi_m(u_m) = -5 \times 2 - 4 - 6 - 2 + 4 \times 5 = -2$となる。したがって，$u_m = 2$としたとき$\Delta\phi_m(\tilde{u}_m)$が3だけ増加し，したがって*CND*の下界値が3だけ増加することになる。また，このときのLagrange緩和解は$y_{13} = y_{14} = y_{15} = y_{23} = 1$，$y_{24} = y_{25} = 0$であり，$y_{13} + y_{14} + y_{15} + 2y_{23} + 2y_{24} + 2y_{25} = 5 \geq 4$となり，分割妥当不等式$m$を満足する。

6　おわりに

本研究では，容量制約をもつネットワークデザイン問題に対して，分割妥当不等式の一般形を示した。また，この分割妥当不等式に対するLagrange緩和問題を示し，Lagrange乗数の効率的な調整法を示した。最後に，提案したLagrange乗数調整法の数値例を示した。今後の課題として，緩和解を満足しない分割妥当不等式の効率的な生成法の開発や，解法の有効性を示すための数値実験を行なう必要がある。

参考文献

[1] A. Balakrishnan, T. Magnanti, P. Mirchandani, M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello (eds.). Network design. *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons,* pp.311-334, 1997.

[2] D. Bienstock and O. Giinliik. Capacitated network design – polyhedral structure and computation. *INFORMS Journal on Computing*, Vol.8, pp.243-259, 1996.

[3] B. Gendron and T.G. Crainic. Parallel implementations of bounding procedures for multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-94-45, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1994.

[4] B. Gendron and T.G. Crainic. Relaxations for multicommodity capacitated network

design problems. Technical Report CRT-965, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1994.

[5] B.Gendronand and T.G. Crainic. Bounding procedures for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. Technical Report CRT-96-06, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1996.

[6] B.Gendron, T.G Crainic, and A. Frangioni. Multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-98-14, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1999.

[7] O.Günlük. A branch-and-cut algorithm for capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, Vol.86, pp.17-39, 1999.

[8] T.Magnanti, P. Mirchandani, and R. Vachani. The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, Vol.60, pp.233-250, 1993.

[9] 片山直登，春日井博．容量制約付きネットワークデザイン問題の強い妥当不等式．日本経営工学会秋季研究大会予稿集，pp.281－282,1992.

[10] 片山直登，春日井博．容量制約をもつ多品種流ネットワークデザイン問題．日本経営工学会誌， Vol.44, pp.164-175, 1993.