予算制約をもつネットワークデザイン問題の双対上昇法

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワークデザイン問題は，様々な条件の下で，ネットワークの形状と多品種のものの流れを求める問題の総称である．この問題には様々な応用分野が存在しており，主な対象として，道路ネットワーク設計，通信ネットワーク設計，輸送路線計画，航空ネットワーク計画や上下水道・ガス・電力ネットワーク設計などを挙げることができる．予算制約をもつネットワークデザイン問題（budget network design problem, *BND*）は，与えられたデザイン費用の予算の範囲内で構成できる適切なネットワークを求める基本的な問題である．目的関数は線形のルーティング費用であり，線形のデザイン費用を予算制約にもつモデルとなる。

BND に対して，多くの厳密解法と近似解法が提案されている。厳密解法では下界平面法とよばれる緩和問題を用いた方法，Lagrange 緩和を用いた方法や分枝限定法などがある。一方，近似解法では，貪欲解法であるフォワード法やバックワード法などがある。

Boyce-Farhi-Weischedel[4]は，ルーティング費用の総和を最小にするネットワークがすべてのアークを含むネットワークであり，そのルーティング費用は *BND* の下界値となる性質を用いた下界平面を示している。Hoang[7]は，あるアークを取り除いたときに，この両端点を始点と終点とする品種のフローは迂回したパスを通るため，ルーティング費用が増加するという考え方を用いた下界平面を示している。Gallo[6]は，アークの両端を始点・終点としない品種のフローに対するルーティング費用の増加量も考慮し，この増加量を下界平面の係数値に加算していく方法を示している。Ahuja-Murty[1]は，2

本目のアークを取除いたときの最小ルーティング費用の増加量が1本目のアークを取除いたときの増加量より大きな場合には，この差分を下界平面の2本目のアークの係数に加算できること考慮した下界平面を示している。片山直登－春日井[8]は，フロー保存式をLagrange緩和した問題が強い下界平面となることを用いた下界値を示している。

Scott[12]は，下界値による限定操作を行なわないバックトラック法を提案している。分枝限定法では，Boyce-Farhi-Weischedel[4]がBoyce-Farhi-Weischedeの下界平面を用いた分枝限定法を示しており，Hoang[7]はHoangの下界平面を利用した分枝限定法を示している。また，Dionne-Florian[5]はHoangの下界平面を利用し，Boffey-Hinxman[3]は分枝変数の選択に工夫をした方法を示している。

*BND*では目的関数であるルーティング費用を算出するために全ノード間の最小費用路(最短路)を求める必要があり，繰り返し目的関数値を評価するためには多くの計算が必要となる。このような理由から，近似解法としては主に貪欲的な解法が用いられている。Scott[12]は，最小木などの初期ネットワークからアークを順に加えていくフォワード法と，全アークを含む初期ネットワークからアークを順に取り除くバックワード法を示している。西村昴－日野泰雄[11]は，近傍・入れ換えグラフと組合せ目的関数を用いて，フォワード法とバックワード法を改良している。森津秀夫[10]は，実行可能化・連結網化を用いた分枝限定法や簡易フォワード・バックワード法などを提案している。最近では，片山－百合本[9]が高速な貪欲解法を提案している。

Dionne-Florian[5]は，疑似緩和問題を用いた分枝限定法を示している。また，Wong[13]は，閾値を用いた近似解法を示している。ノード数が十分に大きいとき，この閾値ヒューリスティック法から得られる解では，その目的関数値と下界値(最適値)の比が1に収束することが示されている。

本研究では，予算制約をもつネットワークデザイン問題に対する双対問題を示し，双対問題に対する近似解法である双対上昇法を提案する。

2　問題の定式化と双対問題

需要の発生地点や集中地点，交差点，コンピュータ，集線装置，施設などのように点で表すことのできるものをノードとよび，道路，路線，通信回線などのように点と点を結ぶ線をアークとよぶ。車両，貨物，通信などのように，ネットワーク上には決められたノード間を移動するものが存在する。単位時間当たりの移動量を需要量とよび，アーク上のこの流れをフロー，需要の出発ノードを始点，到着ノードを終点とよぶ。一般的には品種はものの種類を表すが，本研究では同一の始点・終点をもつものを同一の品種とし，始点または終点が異なるものは異なる品種として区別する。

アークには，デザイン費用とルーティング費用が与えられている。デザイン費用は，

道路建設費用，回線設置・レンタル費用などのようにアークを設置・使用するときに発生する固定費用を表す。ルーティング費用は，ものがアーク上を移動するときに発生する費用で，走行費用(時間)，輸送費用(時間)，通信費用(時間)などのようなフロー量に依存する変動費用(時間)を表す。また，使用できるデザイン費用に上限が与えられており，これを予算とよぶ。

ノード集合を N，向きのないアーク集合を A，品種の集合を K とする。アーク (i,j) を設置するか否かを表すデザイン変数を y_{ij} とし，アーク (i,j) 上の品種 k のフロー量を表すアークフロー変数を x_{ij}^k とする。アーク (i,j) の設置によって発生するデザイン費用を f_{ij}，品種 k のルーティング費用を c_{ij}^k，デザイン費用のための予算を B とする。

アークフロー変数を用いた BND の定式化を示す。

$$(BND)\ \text{最小化}\ \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}(c_{ij}^k x_{ij}^k + c_{ji}^k x_{ji}^k) \tag{1}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{i\in N} x_{in}^k - \sum_{j\in N} x_{nj}^k = \begin{cases} -1 & if\ n = O^k \\ \ \ 1 & if\ n = D^k \\ \ \ 0 & otherwise \end{cases} \quad for\ all\ n\in N,\ k\in K \tag{2}$$

$$\sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \le B \tag{3}$$

$$x_{ij}^k \le y_{ij},\ x_{ji}^k \le y_{ij} \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{4}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad for\ all\ (i,j)\in A \tag{5}$$

$$x_{ij}^k \ge 0,\ x_{ji}^k \ge 0 \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{6}$$

(1)式は，ルーティング費用の総和の最小化を表す。(2)式はフロー保存式とよばれる式であり，ノード n における流入量と流出量の差が，ノード n が品種 k の始点であれば－1，終点であれば1，その他の中継ノードであれば0となることを表し，始点から出たフローが必ず終点に到着することを表す。(3)式は，選択したアークのデザイン費用の合計が予算以下であることを表す予算制約である。(4)式は，アーク (i,j) が存在するときにのみフローの存在を許す強制制約式であり，アーク (i,j) 上のフロー量とデザイン変数の関係を表す。(5)式はデザイン変数の0－1条件，(6)式はアークフロー変数の非負条件である。

(5)式の0－1条件を(7)式のように線形緩和した線形緩和問題 LRP を作成する。

$$y_{ij} \ge 0 \quad for\ all\ (i,j)\in A \tag{7}$$

さらに，この線形緩和問題 LRP の双対問題を作成する。(2)式の n，k に対する双対変数を v_n^k，(3)式に対する双対変数を u，(4)式の k，(i,j) に対する双対変数を w_{ij}^k とする。このとき，線形緩和問題 LRP の双対問題 DP は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
(DP)\quad &\text{最小化} && \sum_{k\in K}(v_{D^k}-v_{O^k})-Bu && (8)\\
&\text{条件} && v_j^k-v_i^k\le c_{ij}^k+w_{ij}^k \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A && (9)\\
& && v_i^k-v_j^k\le c_{ji}^k+w_{ji}^k \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A && (10)\\
& && \sum_{k\in K}(w_{ij}^k+w_{ji}^k)\le f_{ij}u \quad for\ all\ (i,j)\in A && (11)\\
& && w_{ij}^k\ge 0,\quad w_{ji}^k\ge 0 \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A && (12)\\
& && u\ge 0 && (13)
\end{aligned}
$$

3　双対上昇法

3.1　$\boldsymbol{u}$ の設定

実行可能な u が与えられた場合，問題 DP は容量制約をもたないネットワークデザイン問題の双対問題と等価な問題と見なすことができる。このため，u が与えられた場合には，容量制約をもたないネットワークデザイン問題に対する Balakrishnan-Magnanti-Wong が示した効率的なラベリング法[2]を適用することによって，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の値を定めることができる。

実行可能な u を定めれば，ラベリング法を用いて $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を定めることができ，DP の目的関数値，すなわち BND の下界値を求めることができる。はじめに，u の下限値と上限値を示し，次に u の設定方法について記述する。

u は非負であるので，下限は 0 と設定することができる。$u=0$ のとき $f_{ij}\,u=0$ であるので，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ となる。このとき，双対問題 DP は，品種 k 毎のアークの長さを $\boldsymbol{c}$ とした最短路問題の双対問題に分割することができる。最短短路問題は容易に解くことができるため，$u=0$ のときの目的関数値を容易に求めることができる。

次に，u の上限値 $\bar{u}$ を考える。BND において，アークの重みを f とした最小木問題の解を $\bar{y}$ とする。この解が最も予算を使用しない BND の実行可能解となる。この $\bar{y}$ に対する実行可能な x は，$\bar{y}_{ij}=1$ からなる最小木上で，アークの長さを $\boldsymbol{c}$ とした品種 k 毎の最短路問題を解くことにより求めることができる。一方，双対問題において，v_j^k はこの最小木上における品種 k の始点 O^k からノード j までの最短距離を表す距離ポテンシャルと見なすことができるので，この最小木上で求められる始点 O^k からノード j までの距離を $\bar{\boldsymbol{v}}$ とおく。一方，(9)式と(12)式より，$w_{ij}^k\ge\max\{c_{ij}^k-v_j^k+v_i^k,0\}$ であるので，$\bar{w}_{ij}^k\ge\max\{c_{ij}^k-\bar{v}_j^k+\bar{v}_i^k,0\}$ と設定する。以上のことから，$\bar{u}$ を次式で定めることにする。

$$
\bar{u}=\max_{(i,j)\in A}\{\sum_{k\in K}(\bar{w}_{ij}^k+\bar{w}_{ji}^k)/f_{ij}\}
$$

$\bar{w}_{ij}^k$，$\bar{w}_{ji}^k$ は DP の実行可能解であるので，$\bar{u}$ も実行可能解となる。そのため，u は 0

$\leq u \leq \bar{u}$ の範囲で探索すればよいと考えられる。

次に，２分探索法と劣勾配法を用いた u の探索法を示す。次式の相補性条件

$$\{f_{ij}u - \sum_{k \in K}(w_{ij}^k + w_{ji}^k)\}y_{ij} = 0$$

より，実行可能解 $\tilde{\boldsymbol{w}}$ と $\tilde{u}$ が与えられたとき，$f_{ij}\,\tilde{u} - \sum_{k \in K}(\tilde{w}_{ij}^k + \tilde{w}_{ji}^k) = 0$ であれば，$y_{ij} = 1$ と想定できる。そこで，$f_{ij}\,\tilde{u} - \sum_{k \in K}(\tilde{w}_{ij}^k + \tilde{w}_{ji}^k) = 0$ であれば $y_{ij} = 1$，それ以外は $y_{ij} = 0$ とした解を $\tilde{\boldsymbol{y}}$ とおく。このとき，$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij} > B$ であれば(３)式を満足しないため，u を大きくすることによって $\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij}$ を減少させることができる。一方，$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij} < B$ であれば(３)式を満足しているため，(８)式より，u を小さくすることによって下界値を増加できる可能性がある。

はじめに，２分探索法を示す。m 回目の探索における u を u^m，下限値を u_{LB}^m，上限値を u_{UB}^m，DP の目的関数値を ϕ^m とする。また，BND の最良の下界値を LB，収束条件を表す定数を ε とする。

ステップ１　$u^0 := 0$，$u_{LB}^1 := 0$，$u_{UB}^1 := \bar{u}$，$LB := 0$，$y^m := 0$，$m := 1$とする。

ステップ２　$u^m := (u_{LB}^m + u_{UB}^m)/2$ とする。$|u^m - u^{m-1}| \leq \varepsilon$ であれば終了する。

ステップ３　u^m を用いて，ラベリング法[1] によって $\tilde{v}$，$\tilde{\boldsymbol{w}}$ と ϕ^m を求める。$\tilde{\boldsymbol{y}}$ を求め，$\tilde{\boldsymbol{y}}^m := \tilde{\boldsymbol{y}}$ とする。

ステップ４　$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij} > \mathrm{B}$ であれば $u_{LB}^{m+1} := u^m$ とし，$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij} < \mathrm{B}$ であれば $u_{UB}^{m+1} := u^m$ とする。$\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\,\tilde{y}_{ij} = \mathrm{B}$ であれば，$LB := \phi^m$ として終了する。

ステップ５　$LB < \phi^m$ なら，$LB := \phi^m$ とする。$m := m+1$ としてステップ２へ戻る。

次に劣勾配を用いた方法を示す。双対変数 u に対応する制約は(３)式である。そこで，(３)式の劣勾配を用いると，m 回目の探索における u^m は次のように更新できる。

$$u^m := [u^{m-1} + \alpha(UB - LB)/(\sum_{(i,j) \in A} f_{ij}\tilde{y}_{ij} - B)]_0^{\bar{u}}$$

α は０から２のパラメータ，UB は BND の最良の上界値である。また，$[a]_b^c$ は，$a < b$ であれば b，$a > c$ であれば c，それ以外は a を表す。

3.2　w の更新法

２分探索法や劣勾配法を用いて u を設定すれば，ラベリング法を用いて $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を定めることができる。ラベリング法では $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ を初期値として，目的関数値が増加するように $\boldsymbol{w}$ の値を更新していく。

u が与えられたとき，ラベリング法によって求めた $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{w}(u)$をおく。２つの u であ

---

[1] 付録Ａ参照

るu_1とu_2が$u_1<u_2$であるとする。このとき，$f_{ij}\,u_1<f_{ij}\,u_2\ (\forall(i,j))$であるため，$\sum_{k\in K}(w_{ij}^k(u_1)+w_{ij}^k(u_1))\le f_{ij}\,u_1\ (\forall(i,j))$から$\sum_{k\in K}(w_{ij}^k(u_1)+w_{ij}^k(u_1))\le f_{ij}\,u_2\ (\forall(i,j))$を得る。したがって，$\boldsymbol{w}(u_1)$は$u_2$のときの実行可能解となる。したがって，$u_1<u_2$でかつ$\boldsymbol{w}(u_1)$が求められていれば，$\boldsymbol{w}(u_2)$を求める際にラベリング法の初期値$\boldsymbol{w}$として，$\boldsymbol{w}(u_1)$の値を採用することができる。

以上のことから，2分探索法では$u_{LB}^m<u^m$であるので，u_{LB}^mのラベリング法の解$\boldsymbol{w}(u_{LB}^m)$をu^mのときの初期値$\boldsymbol{w}$に用いることができる。一方，劣勾配法において$u^{m-1}<u^m$であれば，u^{m-1}のラベリング法の解$\boldsymbol{w}(u^{m-1})$をu^mのときの初期値$\boldsymbol{w}$に用いることができる。

4　おわりに

本研究では，予算制約をもつネットワークデザイン問題に対する双対問題を示し，双対問題に対する双対上昇法を提案した。一般的に双対上昇法はLagrange緩和法やBenders分解法と比較して効率的な解法である。しかしながら，本研究は理論的な側面のみに留まっているため，提案した解法の有効性を検証のために他の解法との比較による数値実験を行う必要がある。また，本来，求めたいものは近似解および上界値である。そのため，双対解をもとにした双対ヒューリスティク解法や従来の近似解法と組合せた解法を開発することも必要である。

A　容量制約をもたないネットワークデザイン問題に対するラベリング法

ステップ1　$w_{ij}^k := 0$ *for all* $k\in K,\ (i,j)\in A,$

$v_i^k :=$"アーク(i,j)の長さをc_{ij}^kとしたネットワーク上における始点O^kからノードiまでの最短距離" *for all* $i\in N,\ k\in K,$

$F_{ij} := f_{ij}$ *for all* $(i,j)\in A,$

$N_1(k) := N\backslash\{D^k\}$ *for all* $k\in K,$

$N_2(k) := \{D^k\}$ *for all* $k\in K,$

$z := \sum_{k\in K}(v_{D^k}^k - v_{O^k}^k),$

$CANDIDATES := \{k\in K \mid O^k\in N_1(k)\}.$

ステップ2　$k\in CANDIDATES,$

$A(k) := \{(i,j) \mid i\in N_1(k),\ j\in N_2(k)\}.$

ステップ3　$A'(k) := (i,j) \mid c_{ij}^k + w_{ij}^k - (v_j^k - v_i^k) = 0,\ (i,j)\in A(k)\},$

$\delta_l := min\{F_{ij} \mid (i,j)\in A'(k)\},$

$\delta_2 := min\{c_{ij}^k + w_{ij}^k - (v_j^k - v_i^k) | (i,j) \in A(k) \backslash A'(k)\}$,

$\delta := min(\delta_1, \delta_2)$.

ステップ4 $w_{ij}^k := w_{ij}^k + \delta$ *for all* $(i,j) \in A'(k)$,

$F_{ij} := F_{ij} - \delta$ *for all* $(i,j) \in A'(k)$,,

$v_n^k := v_n^k + \delta$ *for all* $n \in N_2(k)$,

$z := z + \delta$.

ステップ5 $\delta = \delta_1$ であれば，$F_{ij} = 0$ かつ $(i,j) \in A'(k)$ であるノード i を i^* とし，

$N_1(k) := N_1(k) \backslash \{i^*\}$,

$N_2(k) := N_2(k) \backslash \{i^*\}$.

ステップ6 *CANDIDATES* := *CANDIDATES* $\backslash \{k\}$ とし，*CANDIDATES* $\neq \phi$ であればステップ2へ戻る．

ステップ7 すべての品種 k に対して，$O^k \in N_2(k)$ であれば終了，そうでなければ *CANDIDATES* $:= \{k \in K | O^k \in N_1(k)\}$ として，ステップ2へ戻る．

参考文献

[1] R. K. Ahuja and V. V. S. Murty. New lower planes for the network design problem. *Networks*, Vol.17, pp.113-127, 1987.

[2] A. Balakrishnan, T. L. Magnanti, P. Mirchandani, M. Dell'Amico, F. Maffioli, and S. Martello (eds.). Network design. In *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*, pp.311-334. John Wiley & Sons, New York, 1997.

[3] T. B. Boffey and A. I. Hinxman. Solving the optimal network problem. *European Journal of Operational Research*, Vol.3, pp.386-393, 1979.

[4] D. E. Boyce, A. Farhi, and R. Weischedel. Optimal network problem : Branch-and-bound algorithm. *Environment and Planning*, Vol.5, pp.519-533, 1973.

[5] R. Dionne and M. Florian. Exact and approximate algorithms for optimal network design. *Networks*, Vol.9, pp.37-59, 1979.

[6] G. Gallo. Lower planes for the network design problem. *Networks*, Vol.13, pp.411-425, 1983.

[7] H. H. Hoang. A computational approach to the selection of an optimal network. *Management Science*, Vol.19, pp.488-498, 1973.

[8] 片山直登，春日井博．ラグランジュ緩和法を用いた予算制約をもつネットワークデザイン問題の解法．日本経営工学会誌，Vol.46,pp.21-27,1995.

[9] 片山直登，百合本茂．予算制約をもつネットワークデザイン問題の貪欲解法．土木計画学研究・講演集，Vol.24(2),pp.201－204,2001.

[10] 森津秀夫．最適交通網構成手法に関する基礎的手法．神戸大学，1984.

[11] 西村昂，日野泰雄．最適ネットワーク構成に関する一考察．土木学会論文報告集，Vol.250, pp.85-97, 1976.

[12] A. J. Scott. The optimal network problem : Some computational procedures. *Transportation Research*, Vol.3, pp.201-210, 1969.

[13] R. T. Wong. Probabilistic analysis of a network design problem heuristic. *Networks*, Vol.15, pp.347-363, 1985.