容量制約をもつネットワークデザイン問題の性質
―― 双対問題，Lagrange緩和問題，妥当不等式 ――

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワークデザイン問題は，ネットワークの適切な形状を求める問題である。一般的なネットワークデザイン問題では，同一のネットワーク上で複数の品種のものの流れを扱うため，これらの多品種フローの経路を考慮することになる。ネットワークデザイン問題は，通信ネットワーク設計，交通ネットワーク設計や輸送・配送ネットワーク設計など様々な応用分野が存在している問題である。

交換機・コンピュータ，交差点・交通需要発生吸収点や配送センター・消費地などをノード，通信回線，道路や輸送経路などのノード間をつなぐものをアークとし，呼，データ，自動車や荷物などのノード間を流れるものを品種のフローと表現する。ネットワークデザイン問題は，アークに関するデザイン費用ともの流れに伴うルーティング費用を考慮して，適切なアークを選択する問題と定義される。これらに加え，現実的な問題では通信回線の容量，道路の交通容量や輸送能力のように，アークは単位時間当たりの処理能力に制限をもつ場合が多く，これらの処理能力の制限を考慮した問題は容量制約をもつネットワークデザイン問題とよばれている。

本研究では，与えられた品種のフロー量を処理できる条件のもとで，ルーティング費用とアークのデザイン費用の合計を最小にするようなアークを選択し，ネットワークの形状と各品種のフロー経路を求める問題である容量制約をもつネットワークデザイン問題を取り扱い，この問題に対するいくつかの性質－線形緩和問題，双対問題，Lagrange緩和問題，妥当不等式－を分析する。

容量制約をもつネットワークデザイン問題は，組合せ最適化問題の中でも最も難しい問題の一つとして知られている[2)]。この要因の一つとして，線形緩和問題と元問題のギャップが非常に大きくなることが挙げられる。さらに，ネットワークの形状を定めた後で，

このネットワーク上の多品種フローの実行可能な経路を同定する必要がある。この問題は多品種フロー問題となり，線形計画問題として表現できる。しかし，現実的な規模の多品種フロー問題は大規模な計画問題となってしまうため，この問題を効率的に解くことは困難であり，解の実行可能性を判断する問題自体が困難な問題となる。以上のことから，容量制約をもつネットワークデザイン問題は，他の組合せ最適化問題で有効である線形緩和を用いた分枝限定法や繰返しタイプの近似解法などが十分に機能しない問題となっている。

ネットワークデザイン問題に対しては，通信ネットワーク設計，交通ネットワーク設計などの分野で数多くの研究が行われており，Magnanti-Wong[7]，Minoux[9]，Gavish[4]がサーベイとして，Wong[10]，Balakrishnan-Magnanti-Mirchandani[2]が文献目録集として整理・分類している。一方，本研究の対象とする容量制約をもつネットワークデザイン問題に対する研究は比較的少なく，片山-春日井[11]の研究がある。また，ネットワークが木に限定される問題は容量制約をもつ最小木問題とよばれ，Mali-Yu[8]，Hall[5]など数多くの研究がある。さらに，容量を離散的に増強できる問題はネットワークローディング問題とよばれ，Magnanti-Mirchandani-Vachani[6]，Bienstock-Günlük[3]など近年盛んに研究が行われている。

元問題に対して線形緩和やLagrange緩和を行った緩和問題の最適目的関数値は，元問題の最適目的関数値の下界値となる。しかし，容量制約をもつネットワークデザイン問題では，線形緩和問題を直接解くためには大規模な線形計画問題を解く必要があり，Lagrange緩和問題を解くためには劣勾配法などでLagrange乗数を設定する必要がある。一方，線形緩和問題の双対問題の実行可能解の目的関数値は，元問題の下界値となる。双対問題の実行可能解を求める方法として，双対上昇法が知られている。

2　容量制約をもつネットワークデザイン問題の定式化

2.1　問題の定式化

ノード集合をN，アーク候補集合をA，品種の集合をKと表す。ここで扱う品種は，一般的な品種の定義とは異なり，始点・終点の異なる組合せのものの集まりを異なる品種と定義する。アーク(i,j)を設置するか否かを表すデザイン変数をy_{ij}とし，アーク(i,j)上の品種kのフロー量を表すフロー変数をx_{ij}^kとする。すべてのアークの容量はすべて同一とし，Cで表す。アーク(i,j)のデザイン費用をf_{ij}，品種kの単位フロー量当たりのルーティング費用をc_{ij}^kとする。品種kの始点をO^k，終点をD^k，ODフロー量をd^kとする。

このとき，容量制約をもつネットワークデザイン問題*CND*(Capacitated Network Design Problem)の定式化は，次のように表される。

最小化
$$\sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

条件
$$\sum_{i\in N} x_{in}^k - \sum_{j\in N} x_{nj}^k = \begin{cases} -d^k & \mathit{if}\ n=O^k \\ d^k & \mathit{if}\ n=D^k \\ 0 & \mathit{otherwise} \end{cases} \quad \mathit{for\ all}\ n\in N,\ k\in K \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K} x_{ij}^k \le C y_{ij} \quad \mathit{for\ all}\ (i,j)\in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^k \le d^k y_{ij} \quad \mathit{for\ all}\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{4}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad \mathit{for\ all}\ (i,j)\in A \tag{5}$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \quad \mathit{for\ all}\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{6}$$

(1)式は，ルーティング費用とデザイン費用の総和の最小化を表す。(2)式はフロー保存式とよばれる式であり，ノード n における流入量と流出量の差が，ノード n が品種 k の始点 O^k であれば $-d^k$，終点 D^k であれば d^k，その他の中継ノードであれば0となることを表している。これは，ネットワーク上のアークを経由して，与えられたすべての品種のフローが始点から終点に到着することを表している。(3)式の左辺はアーク (i,j) 上のフロー量の合計であり，右辺はアーク (i,j) が存在するときに C，存在しないとき0となる。これは，アーク (i,j) が存在するときにのみフローの存在を許し，かつそのフロー量は容量以下であることを表している。(4)式は，品種 k のアーク (i,j) 上のフロー量がアーク (i,j) 存在するときに最大 d^k，存在しないとき0であることを表している。(5)式はデザイン変数が0-1離散変数であることを示し，(6)式はフロー変数が非負の連続変数であることを示している。

2.2 基本的な双対問題とLagrange緩和問題

ここでは，*CND* に対する基本的な双対問題とLagrange緩和問題を示す。初めに，(5)式の0－1条件を線形緩和した線形緩和問題を作成する。

$$0\le y_{ij}\le 1 \quad \mathit{for\ all}\ (i,j)\in A \tag{7}$$

さらに，この線形緩和問題の双対問題を作成する。(2)式の n，k に対する双対変数を v_n^k，(3)式の (i,j) に対する双対変数を s_{ij}，(4)式の k，(i,j) に対する双対変数を t_{ij}^k とし，(7)式の (i,j) の $y_{ij}\le 1$ に対する双対変数を r_{ij} とする。このとき，線形緩和問題の双対問題 *DP* (Dual Problem)は次のように表される。

最小化
$$\sum_{k\in K} d^k (v_{D^k} - v_{O^k}) - \sum_{(i,j)\in A} r_{ij}$$

条件 $$v_j^k - v_i^k \le c_{ij}^k + s_{ij} + t_{ij}^k \quad \text{for all } k \in K, \ (i,j) \in A$$
$$Cs_{ij} + \sum_{k \in K} d^k t_{ij}^k \le f_{ij} + r_{ij} \quad \text{for all } (i,j) \in A$$
$$s_{ij} \ge 0, \ r_{ij} \ge 0 \quad \text{for all } (i,j) \in A$$
$$t_{ij}^k \ge 0 \quad \text{for all } k \in K, \ (i,j) \in A$$

この双対問題において，実行可能な $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{t}$ が与えられた場合，この問題はアーク (i,j) の長さを $c_{ij}^k + t_{ij}^k + s_{ij}$ とした品種 k に対する最短路問題に帰着され，容易に解くことができる。ここで，$v_{D^k} - v_{O^k}$ は O^k, D^k 間の最短距離となる。

一方，CND に対して，n, k に対する Lagrange 乗数を v_n^k として，(2)式を Lagrange 緩和した問題 LRP (Lagrange Relaxation Problem)を示す。

最小化 $$\sum_{(i,j) \in A} \left\{ \sum_{k \in K} (c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k) x_{ij}^k + f_{ij} y_{ij} \right\} + \sum_{k \in K} d^k (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k)$$

条件 $$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \le C y_{ij} \quad \text{for all } (i,j) \in A$$
$$x_{ij}^k \le d^k y_{ij} \quad \text{for all } k \in K, \ (i,j) \in A$$
$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{for all } (i,j) \in A$$
$$x_{ij}^k \ge 0 \quad \text{for all } k \in K, \ (i,j) \in A$$

実行可能な $\boldsymbol{v}$ が与えられた場合，目的関数の第2項は定数として扱うことができる。このため，LRP はアーク (i,j) 毎の独立した問題 LRP_{ij} に分離できる。

最小化 $$\sum_{k \in K} (c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k) x_{ij}^k + f_{ij} y_{ij}$$

条件 $$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \le C y_{ij}$$
$$0 \le x_{ij}^k \le d^k y_{ij} \quad \text{for all } k \in K$$
$$y_{ij} \in \{0,1\}$$

$y_{ij}=1$ と $y_{ij}=0$ の場合に分けて検討する。$y_{ij}=1$ の場合，次のような連続ナップサック問題となり，容易に解くことができる。

最小化 $$\sum_{k \in K} (c_{ij}^k - v_j^k + v_i^k) x_{ij}^k + f_{ij}$$

条件 $$\sum_{k \in K} x_{ij}^k \le C$$
$$0 \le x_{ij}^k \le d^k \quad \text{for all } k \in K$$

この連続ナップサック問題から求めた LRP_{ij} の目的関数の最適値を $\alpha_{ij}(\boldsymbol{v})$ とおく。一方，$y_{ij}=0$ の場合には，目的関数の最適値は明らかに0となる。最小化問題であることか

ら，Lagrange 緩和問題 LRP の最適値は，次式のように表すことができる。

$$\sum_{(i,j)\in A}\min(\alpha_{ij}(\boldsymbol{v}),0)+\sum_{k\in K}d^k(v^k_{D^k}-v^k_{O^k})$$

以上，基本的な双対問題 DP と Lagrange 緩和問題 LRP を示した。しかし，ここで取り扱った CND の定式化自体が弱い定式化であるため，一般的にこれらの緩和解から得られる下界値は悪いものであり，上界値との差である双対ギャップが大きくなる傾向にある。

3　カット制約を用いた妥当不等式と双対上昇法

片山-春日井[11]は，カット制約の切上げを用いた妥当不等式，およびこの妥当不等式とフロー保存制約に対する双対変数の双対上昇法を示している。ここでは，これらの方法を示し，さらに双対変数 $\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{t}$ のための双対上昇法も示す。

3.1　カット制約を用いた妥当不等式と双対問題

カット上のフローに対する制約を考える。ノード集合 N の部分集合を S とし，N を S と $\bar{S}(=N\backslash S)$ に分割する。2つのノード集合の一方を始点，他方を終点とする品種の集合を $K(S,\bar{S})$ とおく。このとき，$K(S,\bar{S})$ に含まれる品種は，カット $(S,\bar{S})$ に含まれるアーク上を少なくとも1度以上は通過しなければならない。このため，次の制約が成り立つことが知られている。

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})}\sum_{k\in K(S,\bar{S})}x^k_{ij}\geq\sum_{k\in K(S,\bar{S})}d^k$$

カット $(S,\bar{S})$ 上には，カット上を流れるフロー以上の容量が必要であるので，次式を得る。

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})}Cy_{ij}\geq\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})}\sum_{k\in K(S,\bar{S})}x^k_{ij}\geq\sum_{k\in K(S,\bar{S})}d^k$$

さらに，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})}y_{ij}\geq\sum_{k\in K(S,\bar{S})}d^k/C$$

となり，この左辺は整数値を取るため，右辺を切り上げても不等式が成立する。したがって，次のカット制約式は問題 CND の妥当不等式となる[11]。

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})}y_{ij}\geq\left\lceil\sum_{k\in K(S,\bar{S})}d^k/C\right\rceil\quad for\ all\ S\subset N\tag{8}$$

ここで，$\lceil\ \rceil$は小数点以下を切り上げることを表わす記号である。

これらの妥当不等式を問題 CND の制約条件に追加し，デザイン変数 $\boldsymbol{y}$ を線形緩和した問題を作成する。さらに，線形緩和問題の双対問題を作成する。(2)式の n, k に対する双対変数を v_n^k, (3)式の (i,j) に対する双対変数を s_{ij}, (4)式の k, (i,j) に対する双対変数を t_{ij}^k, (7)式の $y_{ij}\leq 1$ に対する双対変数を r_{ij} とする。さらに，妥当不等式(8)式の S に対する双対変数を u_S とする。また，$i\in S$, $j\notin S$ であるノード集合を S_{ij} とする。このとき，線形緩和問題の双対問題 CDP は次のように表される。

最小化 $$\sum_{k\in K} d^k(v_{D^k}-v_{O^k})-\sum_{(i,j)\in A} r_{ij}+\sum_{S\subset N}\left\lceil \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k/C\right\rceil u_S$$

条件
$$v_j^k-v_i^k\leq c_{ij}^k+s_{ij}+t_{ij}^k \qquad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{9}$$

$$Cs_{ij}+\sum_{k\in K} d^k t_{ij}^k+\sum_{S\in S_{ij}} u_S\leq f_{ij}+r_{ij} \qquad for\ all (i,j)\in A \tag{10}$$

$$s_{ij}\geq 0,\ \ r_{ij}\geq 0 \qquad for\ all\ (i,j)\in A \tag{11}$$

$$t_{ij}^k\geq 0 \qquad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{12}$$

$$u_S\geq 0 \qquad for\ all\ S\subset N \tag{13}$$

3.2 双対上昇法

ここでは，双対変数 $\boldsymbol{u}$ に関する双対上昇法[11]を紹介し，$\boldsymbol{r}$ および $\boldsymbol{t}$ に関する双対上昇法を提案する。$\boldsymbol{s}$ の実行可能解を $\tilde{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{r}$ の実行可能解を $\tilde{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{u}$ の実行可能解を $\tilde{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{t}$ の実行可能解を $\tilde{\boldsymbol{t}}$ とする。

(1) $\boldsymbol{u}$ に対する双対上昇法

品種 k に対するアーク (i,j) の長さを $c_{ij}^k+\tilde{s}_{ij}+\tilde{t}_{ij}^k$ としたネットワークを考える。ここで，S 内のノード対を (p,q)，その集合を (S,S) と表す。(p,q) $(\in(S,S))$ 間の最短経路の長さを L_S^{pq} とする。また，p, q 間の経路上に少なくとも $\bar{S}$ 内の一つのノードを含む経路の中の最短の長さを TL_S^{pq} とし，この経路はカット $(S,\bar{S})$ 上のアーク数を h_S^{pq} 本含むものとする。このとき，ノード集合 S に対して，次の定理[11]が成り立つことが示されている。

定理 1

$$\delta_S^{pq}=(TL_S^{pq}-L_S^{pq})/h_S^{pq} \quad for\ all\ (p,q)\in(S,S)$$
$$\Delta_S=\min(\min\{\tilde{s}_{ij}|(i,j)\in(S,\bar{S})\},\ \min\{\delta_S^{pq}|(p,q)\in(S,S)\},$$
$$\min\{\delta_{\bar{S}}^{pq}|(p,q)\in(\bar{S},\bar{S})\})$$
$$s_{ij}^*=\tilde{s}_{ij}-\Delta_S \quad for\ all\ (i,j)\in(S,\bar{S})$$

$$u_S^* = \tilde{u}_S + C\Delta_S$$

とする。

このとき，$s_{ij}^*((i,j)\in(S,\bar{S}))$ と u_S^*，および $\tilde{s}_{i'j'}((i',j')\notin(S,\bar{S}))$ と $\tilde{u}_{S'}(S'\neq S)$ は，*CDP* の実行可能解である。また，$\tilde{\boldsymbol{s}}$，$\tilde{\boldsymbol{u}}$ から変更したとき，*CDP* の目的関数値の増加量は次式となる。

$$\left(\left\lceil \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k/C\right\rceil C - \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k\right)\Delta_S$$

(2)　**$\boldsymbol{r}$ に対する双対上昇法**

次に，$\boldsymbol{r}$ の双対上昇法に関する定理を示す。ここで，アーク (i,j) の長さを $c_{ij}^k+\tilde{s}_{ij}+\tilde{t}_{ij}^k$ とした品種 k に対するネットワークを G^k とする。あるアーク (i,j) に対して，次の手順を行なう。

ステップ1　$v_j^k - v_i^k = c_{ij}^k + \tilde{s}_{ij} + \tilde{t}_{ij}^k$ である品種 k の集合を K_{ij}^0 とする。$\sum_{k\in K_{ij}{}^0} d^k - C > 0$ であればステップ2へ，そうでなければ $\gamma_{ij}=0$ としてステップ3へ。

ステップ2　ネットワーク $G^k(k\in K_{ij}^0)$ において，k の O^k，D^k 間の最短距離を L_{ij}^k とし，アーク (i,j) を取り除いたときの最短距離を SL_{ij}^k とする。

$\gamma_{ij} = \min_{k\in K_{ij}{}^0}(SL_{ij}^k - L_{ij}^k)$.

ステップ3　$r_{ij}^* = \tilde{r}_{ij} + C\gamma_{ij}$,

$s_{ij}^* = \tilde{s}_{ij} + \gamma_{ij}$.

ステップ4　品種 $k(\in K_{ij}^0)$ に対して，アーク (i,j) の長さを $c_{ij}^k + s_{ij}^* + \tilde{t}_{ij}^k$ としたネットワーク G^k 上の，最適距離ポテンシャル $\boldsymbol{v}^*$ を求める。

$v_{O^k}^* = \tilde{v}_{O^k}$,

$v_{D^k}^* = \tilde{v}_{D^k} + \gamma_{ij}$.

定理2　上述の手順で求めた r_{ij}^*，s_{ij}^* および $\boldsymbol{v}^*$ は，*CDP* の実行可能解である。このとき，*CDP* の目的関数値の増加量は次式となる。

$$\left(\sum_{k\in K_{ij}{}^0} d^k - C\right)\gamma_{ij} \tag{14}$$

証明

ステップ3の定義より，明らかに(11)式を満足する。$\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{u}$ は変化しないため，(12)と(13)式を満足する。アーク (i,j) に対して，変更した r_{ij}^*，u_S^* を(10)式に代入すると

$$C(\tilde{s}_{ij}+\gamma_{ij}) + \sum_{k\in K} d^k \tilde{t}_{ij}^k + \sum_{S\in S_{ij}} \tilde{u}_S \le f_{ij} + \tilde{r}_{ij} + C\gamma_{ij}$$

となり，$\tilde{s}_{ij}$, $\tilde{t}^k_{ij}$, $\tilde{u}_S$, $\tilde{r}_{ij}$ は実行可能であるため成り立つ。$\boldsymbol{v}^*$ は最適距離ポテンシャルであるため，明らかに(9)式を満足する。以上のことから，r^*_{ij}, s^*_{ij} および $\boldsymbol{v}^*$ は実行可能解となる。

ステップ1では，$v^k_j - v^k_i = c^k_{ij} + \tilde{s}_{ij} + \tilde{t}^k_{ij}$, すなわちアーク (i,j) が最短路に含まれる品種 k の集合 K^0_{ij} を求めている。次に，品種 $k(\in K^0_{ij})$ に対して，常にアーク (i,j) が最短路に含まれているように s_{ij} を増加する。ステップ2では，アーク (i,j) を利用しない最短距離を求めている。この距離と現在の最短距離の差分 $SL^k_{ij} - L^k_{ij}$ だけアーク (i,j) の長さを増加しても，アーク (i,j) は最短路に含まれている。したがって，$s^*_{ij} = \tilde{s}_{ij} + \gamma_{ij}$ としたとき，品種 $k(\in K^0_{ij})$ の O^k, D^k 間の最短距離はアーク (i,j) の長さの増加量 γ_{ij} だけ増加する。

以上のことから，目的関数の第1項の変化量は$\sum_{k\in K_{ij}{}^0} d^k \gamma_{ij}$, 第2項の変化量は $-C\gamma_{ij}$ となり，(14)式を得る。$\sum_{k\in K_{ij}{}^0} d^k - C > 0$ であれば，(14)式の値は正となる。また，$\sum_{k\in K_{ij}{}^0} d^k - C \leq 0$ であれば $\gamma_{ij}=0$ であり，(14)式の値は0となる。いずれの場合でも，(14)式の値は非負である。■

(3) $\boldsymbol{t}$ に対する双対上昇法

$\boldsymbol{t}$ に関する制約条件は，容量制約のないネットワークデザイン問題における強制制約式

$$x^k_{ij} \leq y_{ij} \quad for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A$$

に対する双対変数と同じ形の制約条件となる。したがって，Balakrishnan-Magnanti-Wong が示したラベリング法[1]を $\boldsymbol{t}$ に適用することができる。次に，問題 CND に適用したラベリング法の手順を示しておく。

ステップ1 $t^k_{ij}=0$ $for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A$,

$\tilde{c}^k_{ij} = c^k_{ij} + \tilde{s}_{ij}$ $for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A$,

v^k_i＝“アーク (i,j) の長さを $\tilde{c}^k_{ij}$ としたネットワーク上における始点 O^k からノード i までの最短距離” $for\ all\ i\in N,\ k\in K$,

$F_{ij} = f_{ij} + \tilde{r}_{ij} - \sum_{S\in S_{ij}} \tilde{u}_S - C\tilde{s}_{ij}$ $for\ all\ (i,j)\in A$,

$N_1(k) = N\backslash\{D^k\}$ $for\ all\ k\in K$,

$N_2(k) = \{D^k\}$ $for\ all\ k\in K$,

$z = \sum_{k\in K} d^k (v^k_{D^k} - v^k_{O^k})$,

$CANDIDATES = \{k\in K | O^k \in N_1(k)\}$.

ステップ2 $k\in CANDIDATES$,

$A(k) = \{(i,j) | i\in N_1(k),\ j\in N_2(k)\}$.

ステップ3 $A'(k) = \{(i,j) | \tilde{c}^k_{ij} + d^k t^k_{ij} - (v^k_j - v^k_i) = 0,\ (i,j)\in A(k)\}$,

$\delta_1 = \min\{F_{ij} | (i,j) \in A'(k)\}$,

$\delta_2 = \min\{\tilde{c}_{ij}^k + d^k t_{ij}^k - (v_j^k - v_i^k) | (i,j) \in A(k) \backslash A'(k)\}$,

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

ステップ 4　$t_{ij}^k = t_{ij}^k + \delta / d^k$ *for all* $(i,j) \in A'(k)$,

$F_{ij} = F_{ij} - \delta$ *for all* $(i,j) \in A'(k)$,

$v_n^k = v_n^k + \delta$ *for all* $n \in N_2(k)$,

$z = z + \delta$.

ステップ 5　$\delta = \delta_1$ であれば，$F_{ij} = 0$ かつ $(i,j) \in A'(k)$ であるノード i を i^* とし，

$N_1(k) = N_1(k) \backslash \{i^*\}$,

$N_2(k) = N_2 \cup \{i^*\}$.

ステップ 6　$CANDIDATES = CANDIDATES \backslash \{k\}$ とし，$CANDIDATES \neq \phi$ であればステップ 2 へ戻る。

ステップ 7　すべての品種 k に対して，$O^k \in N_2(k)$ であれば終了，そうでなければ $CANDIDATES = \{k \in K | O^k \in N_1(k)\}$ として，ステップ 2 へ戻る。

線形緩和問題と双対問題 CDP の最適解は，次の線形計画法の相補性条件を満足する。

$$\left(Cs_{ij} + \sum_{k \in K} d^k t_{ij}^k + \sum_{S \in S_{ij}} u_S - f_{ij} - r_{ij}\right) y_{ij} = 0 \quad \textit{for all } (i,j) \in A$$

これは，最適解において $Cs_{ij} + \sum_{k \in K} d^k t_{ij}^k + \sum_{S \in S_{ij}} u_S - f_{ij} - r_{ij} = 0$ であれば，$y_{ij} \geq 0$ であることを意味する。このため，元問題の近似解として，$Cs_{ij} + \sum_{k \in K} d^k t_{ij}^k + \sum_{S \in S_{ij}} u_S - f_{ij} - r_{ij} = 0$ であるアークに対して，$y_{ij} = 1$ と設定することが望ましいことになる。

同様に次の相補性条件を満足する。

$$(x_{ij}^k - d^k y_{ij}) t_{ij}^k = 0 \quad \textit{for all } k \in K, \ (i,j) \in A$$

これは，最適解において $t_{ij}^k > 0$ であれば，$x_{ij}^k = d^k y_{ij}$ であることを意味し，アーク (i,j) 上に品種 k のフローが存在する可能性を意味する。さらに，(3)式の容量制約式を考慮すると，$t_{ij}^k > 0$ である k のフローは C を超えてはならないことになる。ここで，$t_{ij}^k > 0$ かつ $Cs_{ij} + \sum_{k \in K}^{ij} d^k t_{ij}^k + \sum_{S \in S_{ij}} u_S - f_{ij} - r_{ij} = 0$ である品種 k のフロー量を $x_{ij}^k = d^k$ と仮定する。このとき，ラベリング法の手順において，アーク (i,j) を $A'(k)$ に含む品種のフローの合計が C を超えない場合に限って，t_{ij}^k の値を増加する方法が提案できる。

4　迂回フローを考慮した強い妥当不等式

ここでは，迂回フローを考慮することによって，妥当不等式であるカット制約式を持ち上げ，新たな強い妥当不等式を提案する。

ノード集合 $S(\subset N)$ の部分集合を M_S とし，$i \in M_S$，$j \in \bar{M}_S$ であるアーク (i,j) の集合を部分カット $(M_S, \bar{M}_S)$ と定義する。$(M_S, \bar{M}_S)$ によって始点と終点が分割される品種の集合を $K(M_S, \bar{M}_S)$ とする。このとき，次の定理が成り立つ。

定理 3

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} + 2\min\left(\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k,\ \sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij}\right) \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k$$

$$M_S \subset S,\ S \subset N \qquad (15)$$

は，問題 CND の妥当不等式である。

証明

$K(M_S, \bar{M}_S)$ に含まれる品種のフロー量の合計が $(M_S, \bar{M}_S)$ 上に設置されたアークの容量を超える場合，あふれたフローはカット $(S, \bar{S})$ 上を迂回する必要があり，図 1 に示すように，そのフローは $(S, \bar{S})$ 上を 2 回以上通過することになる。

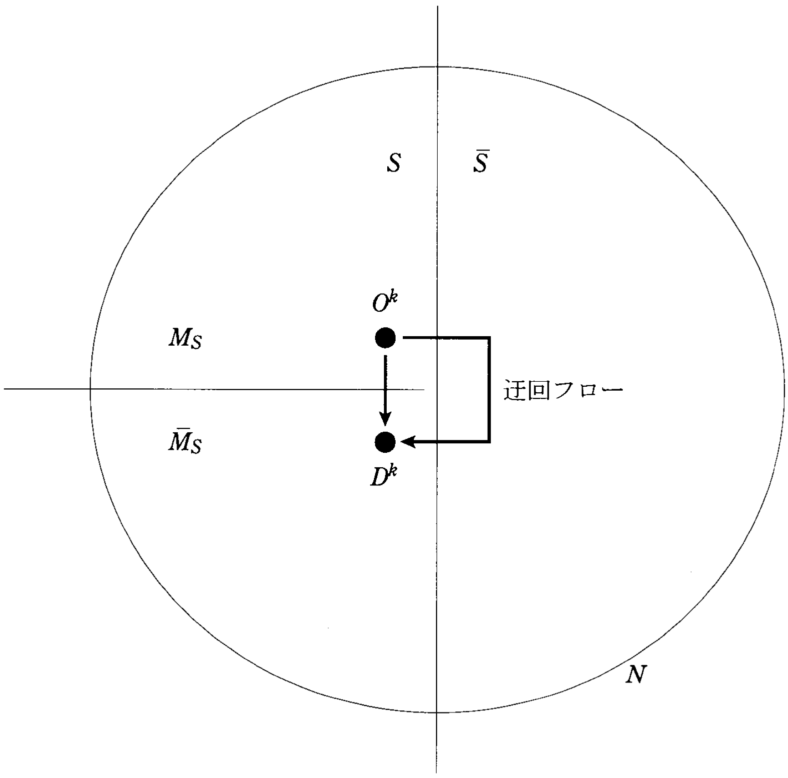

図 1　部分カットと迂回フロー

このことから，$(M_S, \bar{M}_S)$ に含まれるアークが1本も設置されない場合，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k$$

が成り立つ。また，$(M_S, \bar{M}_S)$ に含まれるアークが m 本だけ設置される場合，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\max\left(0,\ \sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k - mC\right)$$

が成り立ち，一般の場合にはカット $(M_S, \bar{M}_S)$ 上の容量は $\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij}$ であるので，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\max\left(0,\ \sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k - \sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij}\right)$$

が成り立つ。したがって，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} + 2\min\left(0,\ \sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij} - \sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k\right) \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k$$

となり，両辺に $2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k$ を加えて，(15)式を得る。■

定理4

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} y_{ij} \geq \left\lceil \left(\sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k\right) \Big/ C \right\rceil$$

$$M_S \subset S,\quad S \subset N \qquad (16)$$

は，問題 CND の妥当不等式である。

証明

$$\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij} \geq \min\left\{\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k,\ \sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij}\right\}$$

が明らかに成り立つ。この式と(15)式より，

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} Cy_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} Cy_{ij} \geq \sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k$$

が成り立ち，両辺を C で割って次式を得る。

$$\sum_{(i,j)\in(S,\bar{S})} y_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} y_{ij} \geq \left(\sum_{k\in K(S,\bar{S})} d^k + 2\sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k\right) \Big/ C$$

この式の左辺は整数値を取るため，右辺を切り上げても不等式が成り立つため，(16)式を得る。■

この妥当不等式は(8)式を持ち上げたものとなり，$\sum_{(i,j)\in(M_S,\bar{M}_S)} y_{ij} \geq \sum_{k\in K(M_S,\bar{M}_S)} d^k/C$ であれば，(8)式よりも強い妥当不等式となる。

(16)式を用いた双対上昇法を考えることができるが，双対上昇法が複雑になり得策ではない。一方，Lagrange 緩和問題 *LRP* を解いた緩和解に対して，解が(16)式を満たさない不等式を列挙し，これらを追加し，さらに Lagrange 緩和した緩和問題を解くことが適当であると考える。

5　おわりに

本研究では，容量制約をもつネットワークデザイン問題のいくつかの性質を検討した。はじめに，基本的な定式化に対する線形緩和問題，双対問題，Lagrange 緩和問題およびその解法を示した。次に，カット制約式を用いた定式化，その双対問題と双対上昇法を紹介し，さらに新たに2種類の双対変数に対する双対上昇法のための定理と手順を提案した。最後に，迂回フローを考慮して，従来のカット制約を用いた妥当不等式を持ち上げることによって生成した新たな妥当不等式を提案した。

容量制約をもつネットワークデザイン問題に対する効率的な解法は，いまだに提案されていない。しかし，良い下界値を求めるためには，提案した妥当不等式を用いた Lagrange 緩和法を適用すれば，効率的な下界値の解法を開発できる可能性がある。また，良い上界値を求めるため効率的な近似解法は，今後の課題として残されている。

参考文献

1) Balakrishnan, A., Magnanti, T. L. and Wong, R. T.: A Dual-Ascent Procedure for Large-Scale Uncapacitated Network Design, *Operations Research*, Vol. 37 (1989), 716-740.

2) Balakrishnan, A., Magnanti, T. and Mirchandani, P.: *Network Design* (*Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*), John Wiley & Sons, 1997.

3) Bienstock, D. and Günlük, O.: Capacitated Network Design—Polyhedral Structure and Computation, *INFORMS journal on Computing*, Vol. 8 (1996), 243-259.

4) Gavish, B.: Topological Design of Telecommunication Networks—Local Access Design Methods, *Annals of Operations Research*, Vol. 33 (1991), 17-71.

5) Hall, L.: Experience with a Cutting Plane Algorithm for the Capacitated Spanning Tree Problem, *INFORMS journal on Computing*, Vol. 8 (1996), 219-234.

6) Magnanti, T. L., Mirchandani, R. and Vachani, R.: Modeling and Solving the Two-Facility Capacitated Network Loading Problem, *Operations Research*, Vol. 43 (1995), 142-157.

7) Magnanti, T. L. and Wong, R. T.: Network Design and Transportation Planning: Models and Algorithms, *Transportation Science*, Vol. 18 (1984), 1-55.

8) Malik, K. and Yu, G.: A Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Minimum Spanning Tree Problem, *Networks*, Vol. 23 (1993), 525-532.

9) Minoux, M.: Network Synthesis and Optimum Network Design Problems: Models, Solution Methods and Applications, *Networks*, Vol. 19 (1989), 313-360.

10) O'heEigeartaigh, M., Lenstea, J. K. and Kan, A. H. G. R.: *Combinatorial Optimization Annotated Bibliographies: Location and Network Design*, John Wiley & Sons, 1985.

11) 片山直登, 春日井博：容量制約をもつ多品種流ネットワークデザイン問題, 日本経営工学会誌, Vol. 44 (1993), 164-175.