期待値とは-1

全事象（標本空間）Ωにおける基本事象$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$のおのおのに実数$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$を対応させるとする．

この値$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$を変数として，一般にXと書く．

このとき，Xを確率変数と呼び，

E(X)＝ $x_1P(A_1)+x_2P(A_2)+x_3P(A_3)+\cdots+x_nP(A_n)$

（　ただし，$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_n)=1$　）

を，Xの期待値(expectation)または平均値といい，E(X)と書く．

期待値とは-2

基本事象A　——＞確率変数X（対応させる）

A_1　——＞x_1

・・・・・・・・・

A_n　——＞x_n

基本事象A_iの確率$P(A_i)$と対応させた確率変数x_iとの積の和が期待値である：

E(X)＝ $x_1P(A_1)+x_2P(A_2)+x_3P(A_3)+\cdots+x_nP(A_n)$

ただし，$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\cdots+P(A_n)=1$

例題1

サイコロを振ったとき，1か6が出たら100円もらえるとする．
このときの期待値を求めなさい．

（考え方）試行：サイコロを振る

基本事象　確率変数	確率
—＞ X	P(X)
A1：1の目が出る—＞100	
A2：2の目が出る—＞　0	
A3：3の目が出る—＞　0	
A4：4の目が出る—＞　0	
A5：5の目が出る—＞　0	
A6：6の目が出る—＞100	

(答)

期待値（金額）は33円

kNo. 8-1-(a),(b)

城山さんは，どうも小遣いが足りません．そこで次のようなことを考えて，値上げしてもらおうとしています．果たしてうまく，実質的な値上げになるのか，期待金額を計算してみましょう．
「現在,月3000円でしょう．毎日に直すと100円ずつになります．そこで，毎日100円ずつもらう代わりに，サイコロをふって，1の目が出た日は400円，その他の目が出た日は60円という小遣いにしてもらえないでしょうか．」
（ただし，1ケ月を30日と考える．）

(a)　サイコロをふったときの，1日の期待金額はいくらになりますか．

(b)　月（30日）に直すと,いくら損をするのでしょうか，それとも得をするのでしょうか．

kNo. 8-1-(a),(b) 考え方（1）

試行：サイコロを振る

確率変数	確率
基本事象　—＞ X	P(X)
A1：1の目が出る—＞400	$\frac{1}{6}$
A2：2の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A3：3の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A4：4の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A5：5の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A6：6の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$

(a)　サイコロをふったときの，1日の期待金額はいくらになりますか．

kNo. 8-1-(a)の答え

試行：サイコロを振る

確率変数	確率
基本事象　—＞ X	P(X)
A1：1の目が出る—＞400	$\frac{1}{6}$
A2：2の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A3：3の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A4：4の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A5：5の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$
A6：6の目が出る—＞ 60	$\frac{1}{6}$

(a)　サイコロをふったときの，1日の期待金額はいくらになりますか．

$$400\times\frac{1}{6}+60\times\frac{5}{6}=66.\dot{6}+50=116.\dot{6}$$

答）　116円 67銭

kNo. 8-1-(b)の答え

試行：サイコロを振る

確率変数	確率
基本事象 —> X	P(X)
A1:1の目が出る—>400	$\frac{1}{6}$
A2:2の目が出る—> 60	$\frac{1}{6}$
A3:3の目が出る—> 60	$\frac{1}{6}$
A4:4の目が出る—> 60	$\frac{1}{6}$
A5:5の目が出る—> 60	$\frac{1}{6}$
A6:6の目が出る—> 60	$\frac{1}{6}$

(b) 月(30日)に直すと,いくら損をするのでしょうか，それとも得をするのでしょうか.

$$\left(400\times\frac{1}{6}+60\times\frac{5}{6}\right)\times 30 = 400\times\frac{1}{6}\times 30+50\times 30$$
$$= 2000+1500 = 3500$$

$$\therefore\ 3500-3000=500$$

答） **500円得をする**

kNo. 8-1-(a),(b)

城山さんは，どうも小遣いが足りません．そこで次のようなことを考えて，値上げしてもらおうとしています．果たしてうまく，実質的な値上げになるのか，期待金額を計算してみましょう．
「現在月3000円でしょう．毎日に直すと100円ずつになります．そこで，毎日100円ずつもらう代わりに，サイコロをふって，1の目が出た日は400円，その他の目が出た日は60円という小遣いにしてもらえないでしょうか．」(ただし，1ケ月を30日と考える．)

(a) サイコロをふったときの，1日の期待金額はいくらになりますか．

（解） $400\times\frac{1}{6}+60\times\frac{5}{6}=66.\dot{6}+50=116.\dot{6}$ 　答） **116円 67銭**

(b) 月(30日)に直すと,いくら損をするのでしょうか，それとも得をするのでしょうか．

（解）

$$\left(400\times\frac{1}{6}+60\times\frac{5}{6}\right)\times 30 = 400\times\frac{1}{6}\times 30+50\times 30$$
$$= 2000+1500 = 3500$$

答） 500円得をする

No. 8-2-1

吉さんはくじを引こうか引くまいかとても迷っています．というのは次のようなくじだからです：

5本のくじがあって，その中に2本の当たりくじが入っています．
同時に2本引いて
(a) 2本とも当たれば1000円もらえ，
(b) 1本だけ当たれば100円もらえる．
(c) もし1本も当たらなければ，500円支払う．

損なような気もしますし，得のような気もします．
期待金額を計算して調べてみましょう．

kNo. 8-2- 考え方 　試行：くじを引く

確率変数	確率
基本事象 —> X	P(X)
2本とも当たる —> 1000	$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{1}{10}$,
1本だけ当たる —> 100	$\frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{2\cdot 3}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{6}{10}$,
全部はずれる —> −500	$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{3}{10}$

期待値は $\therefore 1000\times\frac{1}{10}+100\times\frac{6}{10}-500\times\frac{3}{10}=100+60-150=10$

kNo. 8-2-2

吉さんはくじを引こうか引くまいかとても迷っています．というのは次のようなくじだからです：

5本のくじがあって，その中に2本の当たりくじが入っています．
同時に2本引いて
(a) 2本とも当たれば1000円もらえ，
(b) 1本だけ当たれば100円もらえる．
(c) もし1本も当たらなければ，500円支払う．

損なような気もしますし，得のような気もします．期待金額を計算して調べてみましょう．

（解）(a),(b),(c) の確率をそれぞれ計算して，

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{1}{10},\quad \frac{{}_2C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{2\cdot 3}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{6}{10},\quad \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}}{\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}=\frac{3}{10}$$

$\therefore 1000\times\frac{1}{10}+100\times\frac{6}{10}-500\times\frac{3}{10}=100+60-150=10$ 　10円得をする

統計とは

- 自然現象，経済現象，あるいは社会現象のなかで，データ全体を調べてみると一定の法則や規則性が成り立つことがある．
- このような，データ全体の持つ規則性を，データの統計的法則という．
- 統計とは，このようなデータの統計的法則を見つけるための技法ということもできる．

母集団と標本

- 統計的方法の観察対象となるデータ集団に含まれるすべてのデータを，"**母集団**"という.
- この母集団の特性を調べるために，母集団のデータの一部(これを"**サンプル**"とか"**標本**"という)を取り出して，調べる場合を，"**標本調査**"という. 大量のデータ全体を調べる代わりに，適切な標本を少量抜き出して調べることによって，母集団全体に関する統計的法則を導き出す技術は日常でもよくみかける. (例)政党支持率，視聴率など
- これに対して，母集団のデータ全体を調べる方法を，"**全数調査**"という.

度数分布とは

- 変量(ある性質をもっているが，観測してみなければその値が確定しない量)をいくつかの区分に分割し，それぞれの区分に属する観測値の個数(度数)を表したもの. 変量の分布を見るときなどに用いる.
- 離散型変量=>xのとりうる値：x_1，x_2，・・・ x_nに対し，N個の観測値中x_iの出現頻度をf_i (i=1,2,3･･･)とする.
- 連続型変量=>xの範囲をk個の(等)区間に分割. この区間を階級，その中央値を階級値という. N個の観測値中第i番目階級に入る度数をf_i (i=1,2,3･･･)とする.

度数分布表･ヒストグラム

- 離散型変量，連続型変量のどちらの場合でも，
- 変量と度数の対応をxの度数分布という:
  $x_i \to f_i$　(i=1,2,3･･･)
- 変量に対して実施した度数分布の結果を表にまとめたものを度数分布表という.
- この度数分布表を見やすくするために，グラフ化する:
  ･ヒストグラム：階級と度数を棒グラフで示す.
  ･度数分布多角形：階級の中央値(階級値)を折れ線で結ぶ.

度数分布の例

- 次のデータは，あるサッカーチームの
- ベンチ入りメンバ
- 16人の身長を表す.
- これを度数分布表，
- ヒストグラムで表すと:

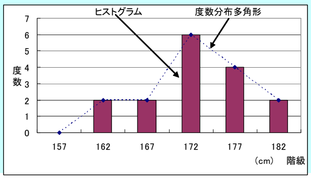
メンバ	身長 (cm)	メンバ	身長 (cm)
1	170	9	178
2	181	10	164
3	171	11	174
4	184	12	168
5	163	13	167
6	178	14	177
7	176	15	172
8	174	16	174

度数分布の例(続き)

- 度数分布表

階　級	階級値(中央値) xi	度数 fi	相対度数 fi/n	累積度数	累積相対度数
155以上～160未満	157	0	0.000	0	0.000
160以上～165未満	162	2	0.125	2	0.125
165以上～170未満	167	2	0.125	4	0.250
170以上～175未満	172	6	0.375	10	0.625
175以上～180未満	177	4	0.250	14	0.875
180以上～185未満	182	2	0.125	16	1.000
合　計		16	1.000	16	1.000

- ヒストグラム



分布の特徴を調べる方法1：代表値

- 観察対象となるデータ集団の統計的分布の特徴を調べる1つの手法に代表値がある.
- **代表値**とは，変量(ある性質をもっているが，観測してみなければその値が確定しない量)全体の特性(全体的な傾向)を1つの値で示すものである.
- (例)平均値，最頻値，中央値など

代表値の例

- （a）平均値：変量の値の合計を，観測値の個数で割ったもの．
  (例)サッカーメンバの身長の平均値：173.2 cm
- （b）最頻値（モード）：度数の最も多い階級のこと．(例)“170以上～175未満”の階級の度数6
- （c）中央値（メジアン）：変量を小さい順に並べたとき，ちょうど中央に位置する変量．偶数個のときは，中央の2つの変量の平均値．
- （例）中央値は174．

163 164 167 168 170 171 172 174 174 174 176 177 178 178 181 184

kNo. 8-3(d)-(e) 指定された代表値を求めなさい．

- (d)　データ8,9,10,11,13の標準偏差　合計51
- 解）平均値：51÷5＝10.2より，
- 分散={(8-10.2)^2+(9-10.2)^2+(10-10.2)^2+(11-10.2)^2+(13-10.2)^2}÷5
- =((-2.2)^2+(-1.2)^2+(-0.2)^2+0.8^2+2.8^2)÷5
- =(4.84+1.44+0.04+0.64+7.84)÷5
- =14.8 ÷5
- =2.96　$\sqrt{2.96} \fallingdotseq \sqrt{3} \fallingdotseq 1.7$
- よって，標準偏差は1.7

仮平均

散布度

- 散布度とは，変量の散らばり度合い（バラツキの程度）のことをいい，分散や標準偏差で表す．
- （a）分散：ばらつきの程度を表す尺度．

$$分散 = \frac{1}{個数}\sum_{1}^{個数}(変量 - 平均値)^2 \times (度数)$$

(例) サッカーのメンバの例で，平均値を173から，分散は546/16＝約34となる．

$$\frac{1}{16}\begin{Bmatrix}(157-173)^2\times 0+(162-173)^2\times 2+(167-173)^2\times 2+\\(172-173)^2\times 6+(177-173)^2\times 4+(182-173)^2\times 2\end{Bmatrix}=\frac{1}{16}(242+72+6+64+162)=\frac{546}{16}$$

- （b）標準偏差：ばらつきの程度を表す尺度．

$$\sqrt{分散}$$

(1)平均値$\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i f_i \quad より$$

$$\bar{x} = \frac{1}{50}\times 2850 = 57$$

kNo. 8-3(a)-(c)指定された代表値を求めなさい．

- (a)　データ15,20,35,40,50の平均値（相加平均）
  解）　(15+20+35+40+50)÷5=32
  160÷5＝32
- (b)　データ9,4,8,10,1,6の中央値（メジアンMEDIAN）
  解）小さい順に並べて，
- 1 4 6 8 9 10　　(6+8)÷2=7
- (c)　データ9,3,6,4,10,3,1,6,8,4,7,4,10の最頻値（モードMODE）
- 解）出現頻度をかぞえる：
- 9 3 6 4 10 1 8 7
- 1 2 2 3 2 1 1 1(回)　　最も多いのは 4

kNo. 8-4

得点データ	階級値x	度数f	xf	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2f$
15-25	20	1	20	37	1369
25-35	30	3	90	27	2187
35-45	40	8	320	17	
45-55	50	12	600	7	
55-65	60	10	600	3	
65-75	70	8	560	13	
75-85	80	6	480	23	
85-95	90	2	180	33	
合計		50	2850	160	

- 平均値 57 ⇐ 2850÷50

37 × 37 = 259 / 111 / 1369　　27 × 27 = 189 / 54 / 729　　729 × 3 = 2187

Sko.8-4

得点データ	階級値x	度数f	xf	$\lvert x-x \rvert$	$\lvert x-x \rvert^{2}f$
15-25	20	1	20	37	1369
25-35	30	3	90	27	2187
35-45	40	8	320	17	2312
45-55	50	12	600	7	588
55-65	60	10	600	3	90
65-75	70	8	560	13	1352
75-85	80	6	480	23	3174
85-95	90	2	180	33	2178
		50	2850	160	13250

- 平均値 57

分散　13250 ÷ 50 = 265

$\sqrt{265}$ の開閉計算

		265
1	1	264
2	3	261
3	5	256
4	7	249
5	9	240
6	11	229
7	13	216
8	15	201
9	17	184
10	19	165
11	21	144
12	23	121
13	25	96
14	27	69
15	29	40
16	31	9

		900
1	1	899
2	3	896
3	5	891
4	7	884
5	9	875
6	11	864
7	13	851
8	15	836
9	17	819
10	19	800
11	21	779
12	23	756
13	25	731
14	27	704
15	29	675
16	31	644
17	33	611
18	35	576
19	37	539
20	39	500
21	41	459
22	43	416
23	45	371
24	47	324
25	49	275
26	51	224
27	53	171
28	55	116
29	57	59
30	59	0

(1)平均値$\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i f_i \quad より$$

$$\bar{x} = \frac{1}{50}\times 2850 = 57$$

(2)分散

$$\mathrm{var}(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i \quad より$$

$$= \frac{1}{50}\times(37^2\times 1 + 27^2\times 3 + \cdots + 33^2\times 2)$$

$$= \frac{1}{50}\times 13250 = 265$$

(3)標準偏差　16 × 16 ≒ 251

$$stdev(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i} \quad より$$

$$= \sqrt{265} \fallingdotseq 16.3$$

kNo. 8-4

得点データ	階級値x	度数f	xf	$\lvert x-x \rvert$	$\lvert x-x \rvert^{2}f$
15-25	20	1	20	37	1369
25-35	30	3	90	27	2187
35-45	40	8	320	17	2312
45-55	50	12	600	7	588
55-65	60	10	600	3	90
65-75	70	8	560	13	1352
75-85	80	6	480	23	3174
85-95	90	2	180	33	2178
		50	2850	160	13250

- 平均値 57　分散 265　標準偏差16.3

kNo. 8-4

得点データ	階級値x	度数f	xf	$\lvert x-x \rvert$	$\lvert x-x \rvert^{2}f$
15-25	20	1	20	37	1369
25-35	30	3	90	27	2187
35-45	40	8	320	17	2312
45-55	50	12	600	7	588
55-65	60	10	600	3	90
65-75	70	8	560	13	1352
75-85	80	6	480	23	3174
85-95	90	2	180	33	2178
		50	2850	160	13250

17
×17
119
17
289

- 平均値 57　分散 265　標準偏差16.3

$\frac{13250}{50}$　$\sqrt{265} \fallingdotseq 16.3$

$\sqrt{225}=15$
$\sqrt{256}=16$
$\sqrt{289}=17$