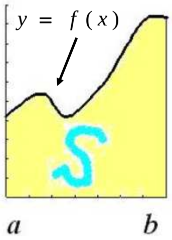
積分（定積分）とは-問題

関数 $f(x)$ と x 軸の区間 a から b に囲まれた部分の面積 S を求める：



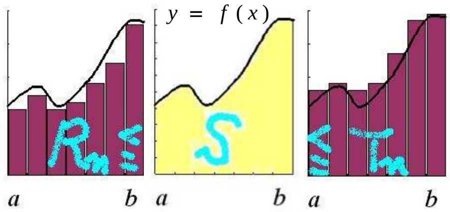
積分（定積分）とは-方法

区分求積法：区間を n 等分した長方形：

① S をすっぽり包んだ長方形の和 Tn

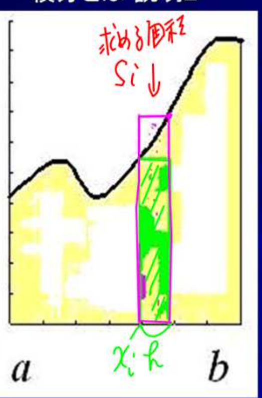
② S にすっぽりつつまれた長方形の和 Rn

の，はさみうちで近似する：



積分とは-説明2

インテグラル



$S_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x$

$R_n < S_n < T_n$　分割数を増やし，$n\to\infty(\Delta x\to 0)$

極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ が存在するとき，

$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; S = \int_a^b f(x)dx$

$R_i = h\cdot f(x_i)$

$T_i = h\cdot f(x_i + h)$

$S_i = S(x_i + h) - S(x_i)$

$R_i \leqq S_i \leqq T_i$

積分（定積分）とは-説明

長方形の面積＝（底辺）×（高さ）

区間を n 等分した1つの長方形の底辺 を Δx とすると

$$S_n = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(x_n)\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x$$

$R_n < S_n < T_n$　分割数を増やし，$n\to\infty(\Delta x\to 0)$　とする

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ が存在するとき，

Snを，Rn と Tnの はさみうちで求める

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x \;\Rightarrow\; S = \int_a^b f(x)dx$$

と表して，この極限値 を a から b までの $f(x)$ の定積分という

インテグラル と定義する

積分（不定積分）の計算方法は？

端的にいうと，微分の逆となる➔

ある関数 $F(x)$の導関数を $f(x)$とすると：

$F'(x) = f(x)$

このとき，$F(x)$ を $f(x)$ の 原始関数 という

（例）$F(x) = x^3$ とすると，$f(x) = 3x^2$

一方，$G(x) = x^3 + 2$ の導関数もまた，$f(x)$となる．
そこで，次のように定数を使って，補正する：

$F(x) + C$　＝>微分＝>　$f(x)$
<=不定積分＝　　ただし，Cは定数

不定積分の定義と計算：

$\int f(x)dx = F(x) + C$　Cを積分定数という

微分公式　＝＝＝＝＝＞　積分公式

$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$　===>　$\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$　C積分定数

（例）

$\int 4x^2 dx = 4\int x^2 dx = \dfrac{4}{3}x^3 + C$　C積分定数

kNo.7-1

微分公式　=====＞　積分公式

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \implies \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad C\text{積分定数}$$

(a)　$\int 4x^2 dx = 4\int x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 + C$

(b)　$\int (x^3 - 2x^2 + 1)dx = \int x^3 dx - 2\int x^2 dx + \int 1\, dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$

(c)　$\int (x+3)(x-2)dx = \int x^2 dx + \int x\, dx - \int 6\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$

ただし，Cは積分定数

kNo.7-3 計算

3. 次の定積分を計算せよ.

$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\, dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \underbrace{1^3 + 1^2}_{=0} + 1\right) - \underbrace{\left(\frac{0}{4} - 0 + 0 + 0\right)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{4} + 1$$

$$= \frac{5}{4} \quad //$$

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

kNo.7-2

2.　$3x^2 - 1$の不定積分$F(x)$のうちで，$F(1) = 2$という条件を満たすものを求めよ.

$y = 3x^2 - 1$

とは積分定数

$$F(x) = \int (3x^2 - 1)dx$$

$$= \int 3x^2 dx - \int 1 dx$$

$$= 3\frac{x^3}{3} - x + C$$

$F(x) = x^3 - x + C$

$F(1) = 2$より $x = 1$を$F(x)$に代入

$F(1) = 1^3 - 1 + C = 2$

$\therefore C = 2$　解けた

原始関数 $F(x) = x^3 - x + 2$

kNo.7-4

4. aを定数とするとき次式が成り立つことを確かめよ.

$$\int_{-a}^{a} x^6\, dx = 2\int_0^a x^6\, dx$$

(奇)　(偶)

$$\int_{-a}^{a} x^6 dx = 2\int_0^a x^6 dx$$

左辺 $= \left[\frac{x^7}{7}\right]_{-a}^{a}$

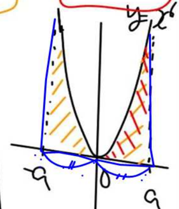
$= \frac{a^7}{7} - \frac{(-a)^7}{7}$

$= \frac{2}{7}a^7$

右辺 $= 2\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a$

$= 2\left(\frac{a^7}{7} - \frac{0^7}{7}\right)$

$= \frac{2}{7}a^7 \quad \therefore$ 左辺=右辺



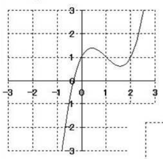
y軸対称

kNo.7-3

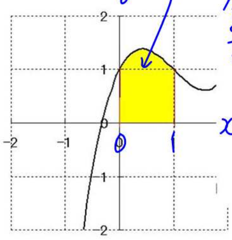
3. 次の定積分を計算せよ.

$S = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\, dx$

$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ とおく



拡大



$(F(x))' = f(x)$

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) = S$$

(微積分の基本定理 II)