正方行列，単位行列

正方行列　：　(n, n)型行列を，正方行列という.

単位行列　：正方行列で，対角成分が1，
　　　　　それ以外の成分はすべて0である

行列式

一般に，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

をn次行列式という.

（2次の正方行列の場合の）逆行列の成分は？-1

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$　$A^{-1}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$　とおくと，

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$AA^{-1}=E$　より

$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　成分を比較して

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1\cdots(1) \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0\cdots(2) \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0\cdots(3) \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1\cdots(4) \end{cases}$$

（2次の正方行列の場合の）逆行列の成分は？-2

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1\cdots(1) \\ a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0\cdots(2) \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0\cdots(3) \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1\cdots(4) \end{cases}$$

$(1)\times a_{22}-(3)\times a_{12}$

$$a_{11}a_{22}b_{11}+a_{12}a_{22}b_{21}=a_{22}$$
$$-)\underline{a_{12}a_{21}b_{11}+a_{12}a_{22}b_{21}=0}$$
$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})b_{11}=a_{22}$$

$\therefore a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$　であれば，

$$b_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

（2次の正方行列の場合の）逆行列の成分は？-3

同様にして，

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$　ならば

$$b_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\qquad b_{12}=\frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$
$$b_{21}=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\qquad b_{22}=\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

逆行列

n次の正方行列Aに対して，

$AX=XA=E$，Eは単位行列

を満たすn次正方行列Xが存在するとき，

このXをAの逆行列といい，

$X=A^{-1}$

（Aインヴァースと読む）と書く.

逆行列（2次の正方行列の場合）

2次の正方行列$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$について，

$ad-bc\neq 0$ であるとき，逆行列が存在し，

$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$となる．

ここで，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$を$A$の行列式

（デターミナント，det$A$とかく）

という．つまり行列式は実数値となる．

kNo3-1

1. 次の行列式の値を計算しなさい．

$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ $= 3\times 1 - 4\times 2$

$= 3-8$

$= -5$

kNo3-2

スカラー

2. 次の行列の逆行列は存在するか．もし存在するならばそれを求めよ．

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ //

$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5-(-4)(-2)$

$=15-8=7\neq 0$

逆行列は存在する．

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$ //

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2-12=-14$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 4\times(-5)-10\times(-2)$

$=-20+20=0$

逆行列は存在しない!!

2元1次連立方程式の逆行列による解法-1

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \cdots (1) \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \cdots (2) \end{cases}$$

2元1次の連立方程式

行列によって表示すると，

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，**AX=b** となる

2元1次連立方程式の逆行列による解法-2

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

両辺に左から逆行列をかけると，

(注意)！逆行列が存在しないとだめ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

2元1次連立方程式の逆行列による解法

逆行列を求める際に示したように

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$$

を *AX=b* の両辺に左からかけると，

$A^{-1}AX=A^{-1}\,b$ ∴ $EX=A^{-1}b$, *E*は*単位行列*

であり，これを行列表示すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

2元1次連立方程式の逆行列による解法

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix}$$

よって，

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad y = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

2元1次連立方程式の逆行列による解法：まとめ

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \cdots (1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \cdots (2) \end{cases} \Rightarrow\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1}$ を求めて左からかける

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \end{pmatrix}$$

よって，

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad y = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

kNo3-3

3. 次の連立方程式を逆行列を用いた解法なさい．

(a) $\begin{cases} -3x + 4y = -2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ⇒ ① 行列表示

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

② 計算．逆行列あるか？

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\times3 - 4\times2 = -9 - 8 = -17$$

OK

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{pmatrix} 3\times(-2) + (-4)\times5 \\ -2\times(-2) + (-3)\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{11}{17} \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ -8x + 5y = 1 \end{cases}$ ⇒ $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\ \ | = 4\times5 - (-1)\times(-8) = 12$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \therefore x = \frac{11}{12},\ y = \frac{5}{3}$$

kNo3-4

4. 点 $P\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$（位置ベクトル）を，次の行列でそれぞれ変換した点 P'（位置ベクトル）を求めよ．また，図示せよ．

左からのかけ算

$$PX = P'$$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times2 + 0\times1 \\ 0\times2 + 0\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times2 + 1\times1 \\ 1\times2 + 0\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$