## ベクトルの成分をまとめて ➔行列のできあがり

いくつかの数を並べて，カッコでくくったもの.

たとえば，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ は2行3列の行列である.

これを2×3行列，(2,3)型行列などとかく.

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ は3行2列の行列である.

これを3×2行列，(3,2)型行列などとかく.

一般に，m×n個の実数を長方形に並べる.



## 行列とは（定義）

一般に，$m \times n$個の実数を長方形に並べる.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$ を，$m \times n$行列，$(m, n)$型行列，$m$行$n$列の行列，または，単に**行列**という. ($A$などとかく)

行列の各要素を**成分**という. 第$i$行,第j列の成分を($i$, $j$)成分といい，　などと表す.

$A=(a_{ij})$ と書くこともある.



## O（零）行列，正方行列，単位行列

**O（零）行列**：すべての成分がO（ゼロ）の行列

正方行列　：　$(n, n)$型行列を，**正方行列**という.

単位行列　：正方行列で，対角成分が1，それ以外の成分はすべて0である

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



## 行列の演算（和･差）

行列についても実数の世界のように演算（加法，減法，乗法）を定義することができる.

- 行列$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$に対して，$A=B$（**行列が等しい**）とは：
  $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ について，すべての$i$ , $j$ に対して $a_{ij} = b_{ij}$ が成立すること.

行列の和･差：
（複号同順）

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots \quad \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$



## 行列の演算（スカラー倍）

- 行列Aに対して，スカラー倍とは，
  各行列の成分がスカラー倍となる：
  $kA= ( ka_{ij} )$

**（注意!）行列の和･差が成立するのは同じ型の行列どうしの場合のみである.**



### 行列の演算（和･差）の例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

## 行列の演算（積）

行列の積：

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots a_{qr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots b_{rs} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots c_{qs} \end{bmatrix}$$

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1r}b_{r1}$　$a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\cdots$

$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots$

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$$



## 行列の演算（積）

- **行列の積** $AB$は，（q，r）型行列$A$＝（ $a_{ij}$ ）と（r，s）型行列$B$＝（ $b_{ij}$ ）について成り立つ．すなわち，行列の積は，積の左側行列の列数と右側行列の行数が等しいときのみ成立する．積の行列の型は（q，s）型となる．（行列の積には，×記号を用いない．）行列の積：

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots b_{rs} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots c_{qs} \end{bmatrix}$$

左側の第$i$行の成分と右側の第$j$列成分の個々の積の和が積の第( $i$ , $j$ )成分となる．すなわち，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$$



## kNo2-1:1

1. 次の行列を計算しなさい．

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

のとき，

$\mathbf{A}^2$,　$\mathbf{AB}$,　$\mathbf{BA}$,　$\mathbf{B}^2+\mathbf{A}^2$

$$A^2=AA$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times3 \\ 4\times1+3\times4 & 4\times2+3\times3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$$



## No2-1:2

1. 次の行列を計算しなさい．

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

のとき，

$\mathbf{A}^2$,　$\mathbf{AB}$,　$\mathbf{BA}$,　$\mathbf{B}^2+\mathbf{A}^2$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times2+2\times1 \\ 4\times1+3\times0 & 4\times2+3\times1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$



## No2-1:3

1. 次の行列を計算しなさい．

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

のとき，

$\mathbf{A}^2$,　$\mathbf{AB}$,　$\mathbf{BA}$,　$\mathbf{B}^2+\mathbf{A}^2$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times4 & 1\times2+2\times3 \\ 0\times1+1\times4 & 0\times2+1\times3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$



## No2-1:4

1. 次の行列を計算しなさい．

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

のとき，

$\mathbf{A}^2$,　$\mathbf{AB}$,　$\mathbf{BA}$,　$\mathbf{B}^2+\mathbf{A}^2$

$$B^2=BB$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times2+2\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times2+1\times1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B^2+A^2$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}$$

## No2-1:5

(f) $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2$

(g) $(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2+2\mathrm{AB}$

$(A-B)^2$

$$=\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\right)^2$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\8 & 4\end{pmatrix}$$

$(A-B)^2+2AB$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\8 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\16 & 26\end{pmatrix}$$



## No2-2

3.

$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}, \mathrm{Y}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\a & b\end{pmatrix}$

のとき,

$\mathrm{XY}=\mathrm{YX}$ となるように, $a, b$ の値を求めよ.

$$XY=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2a & 2+2b\\-3+4a & 6+4b\end{pmatrix}$$

$$YX=\begin{pmatrix}-1 & 2\\a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+6 & -2+8\\a+3b & 2a+4b\end{pmatrix}$$

各成分を比較して,

$-1+2a=5 \quad \therefore a=3$

$2+2b=6 \quad \therefore b=2$



## No2-3

2. 次の行列を計算しなさい.

$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+2\times0+(-1)\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}9\\5\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & 6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}9\\5\\7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\times3 & 9\times(-2) & 9\times6\\5\times3 & 5\times(-2) & 5\times6\\7\times3 & 7\times(-2) & 7\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27 & -18 & 54\\15 & -10 & 30\\21 & -14 & 42\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\3 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\5 & 8\\6 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times4+(-1)\times5+3\times6 & 2\times7+(-1)\times8+3\times9\\3\times4+2\times5+(-2)\times6 & 3\times7+2\times8+(-2)\times9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 33\\10 & 19\end{pmatrix}$$