シグマΣとは？

数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の和を表す方法。この和を、 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ とすると

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k
 \end{aligned}$$

k の初期値を 1 として、1 ずつ n まで増加する。各項を代表して a_k で表す。Σ は和 (加算) の意味

シグマΣの基本公式

数列の一般項が $c_n = a_n + b_n$ のとき m をスカラー (実数) とすると

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n m a_k = m a_1 + m a_2 + m a_3 + \dots + m a_n$$

$$= m (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$= m \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n m a_k = m \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sum_{k=1}^n k &= 1 + 2 + \dots + n, \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

(1) ∴)

初項 1 公差 1 の等差数列の第 n 項までの和であるから

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \sum_{k=1}^n k^2 &= 1^2 + 2^2 + \dots + n^2, \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sum_{k=1}^n k^3 &= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3, \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2
 \end{aligned}$$

(2)の証明

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^3 - k^3 \right\} \text{ を計算する。}$$

まず, 右辺を変形

$$\text{右辺} = \sum_{k=1}^n \left\{ (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{シグマの性質より}$$

↑ 求めたい和

一方, S_n を展開式 (Σ を使わない) で書くと

$$S_n = \{2^3 - 1^3\} + \{3^3 - 2^3\} + \{4^3 - 3^3\} + \dots + \{(n+1)^3 - n^3\}$$

$$= (n+1)^3 - 1^3$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$\therefore n^3 + 3n^2 + 3n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$3 \sum_{k=1}^n k^2 = n^3 + 3n^2 + 3n - 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n - 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \quad (1) \text{より}$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n}{2} = \frac{2n^3 + 6n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 6n + 1)}{2}$$

∴

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(3)の証明

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ (k+1)^4 - k^4 \right\} \text{ を計算する。}$$

まず, 右辺を変形

$$\text{右辺} = \sum_{k=1}^n \left\{ (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - k^4 \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \quad \text{シグマの性質より}$$

↑求めたい和

一方, S_n を展開式 (Σ を使わない) で書くと

$$S_n = \{2^4 - 1^4\} + \{3^4 - 2^4\} + \{4^4 - 3^4\} + \cdots + \{(n+1)^4 - n^4\}$$

$$= (n+1)^4 - 1^4$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

$$\therefore n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4 \sum_{k=1}^n k^3 + 6 \sum_{k=1}^n k^2 + 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$4 \sum_{k=1}^n k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} - n \quad (1), (2) \text{より}$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 3n = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1)$$

$\therefore$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

シグマの性質を用いて解くと、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 2(k+1) &= 2 \sum_{k=1}^5 (k+1) && \text{スカラーは前に,} \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1 \right) && \text{和はそれぞれの和に,} \\ &= 2 \{ (1+2+3+4+5) + (1+1+1+1+1) \} = 2 \times 20 = 40 \end{aligned}$$

特にこの部分

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= 1+2+\dots+n, \quad \text{初項1, 交差1の等差数列の第 } n \text{ 項までの和であるから,} \\ &= \frac{(1+n)n}{2} \end{aligned}$$

<メモ>