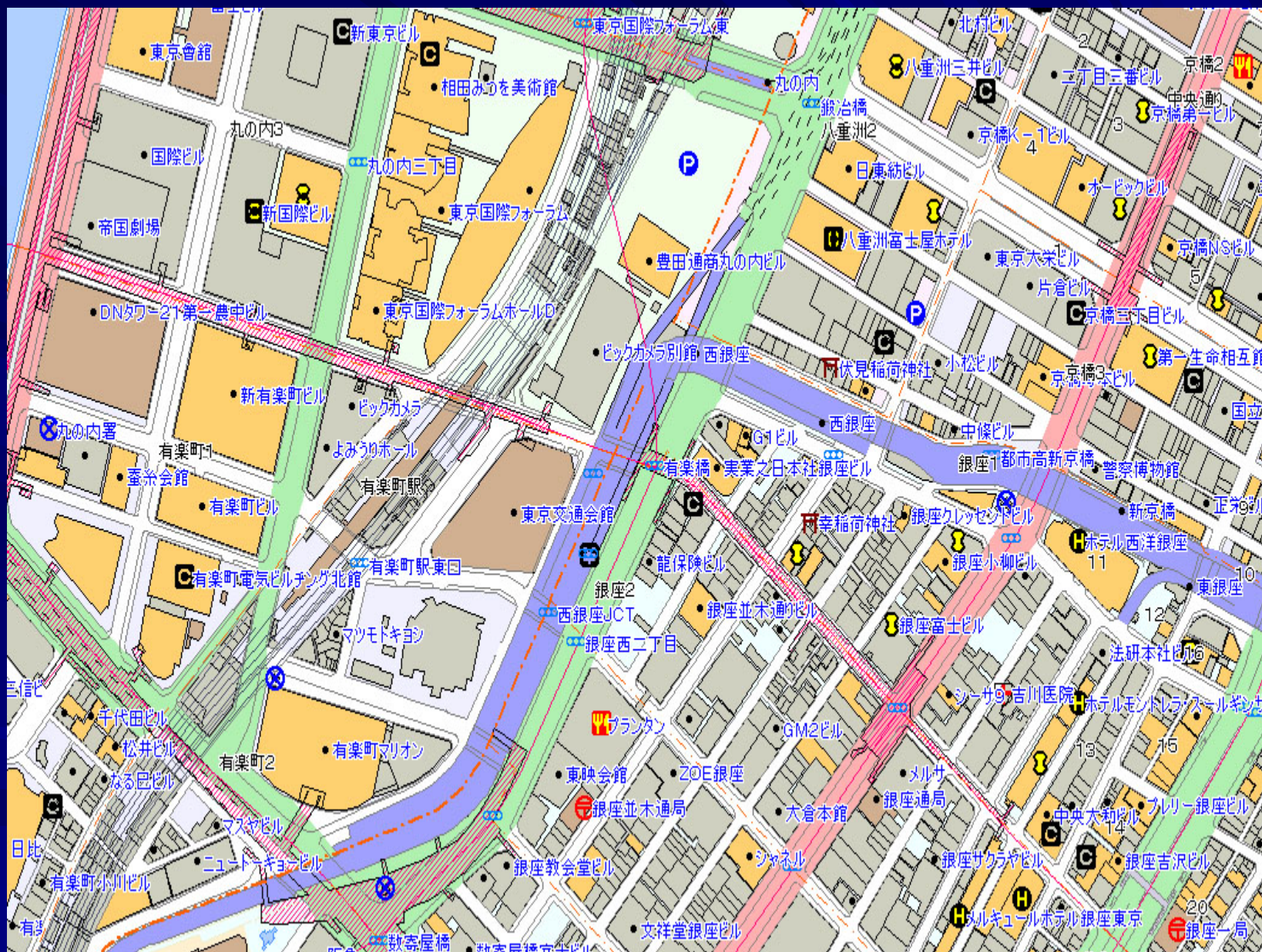


数学II(第4回)

ベクトルと成分表示

本日のメニュー:

- ベクトルとは
- ベクトルの成分表示
- No04のプリント



地図を回転



ベクトル地図とは

色・大きさ・形・位置など画像を構成する情報を、データとして記録している電子地図。

画像データとして扱う「ラスタ地図」と比べ、情報量が少なく済む。

また、ズームや回転などを行っても画質が劣化しない。

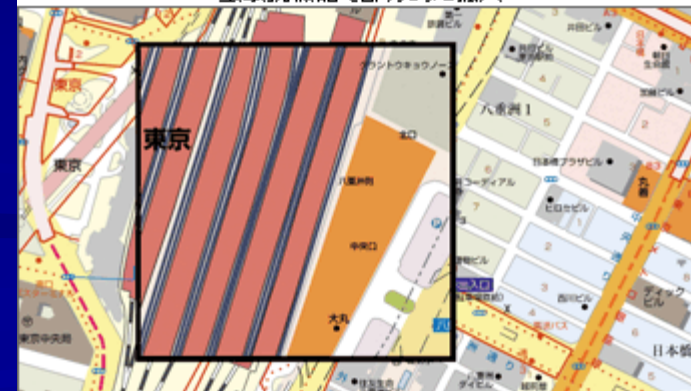
マウス操作でポイント移動



サブマップ表示



虫眼鏡機能で部分的に拡大



現実社会での応用は？

MobileFramerが可能にする画像表示 © Connect Technology Corp.

引用: <http://www.connect-tech.co.jp/corporation/profile.html>

<http://www.connect-tech.co.jp/products/m-framer/?gclid=CKyJw9yBhlgCFSg2TAodXWnsFg>



現実社会での応用は？

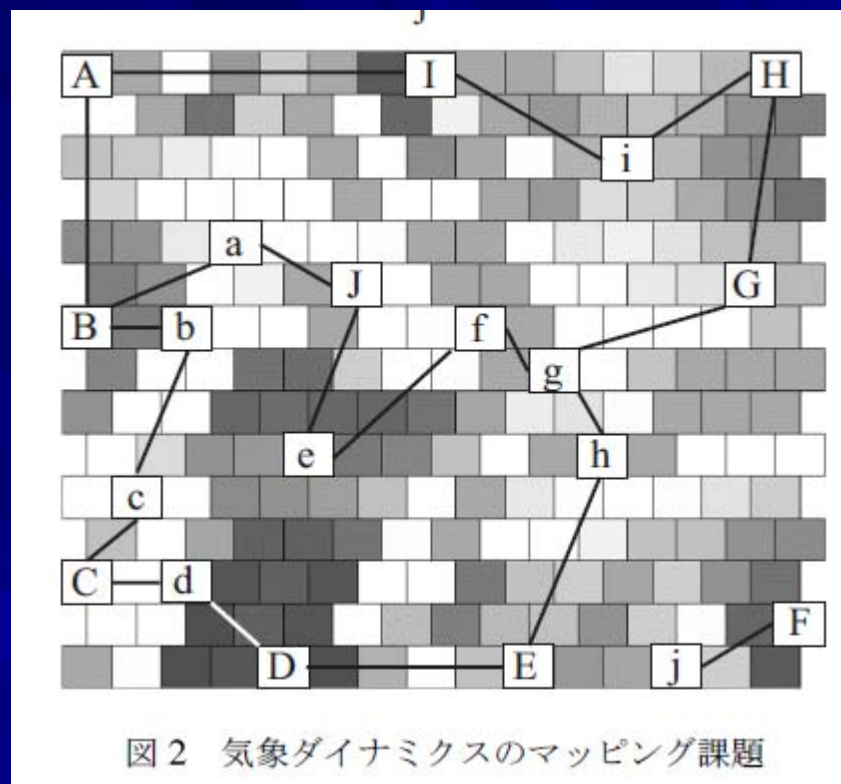
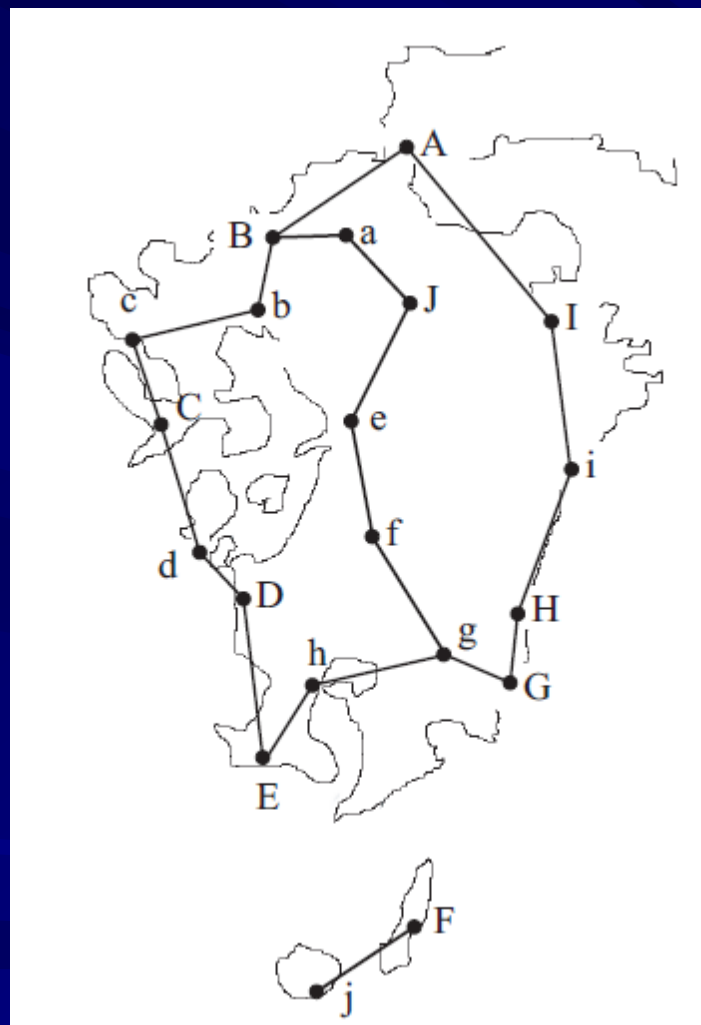


図2 気象ダイナミクスのマッピング課題

引用：
www.brain.kyutech.ac.jp/~furukawa/publisher/2005c01_furukawa.pdf

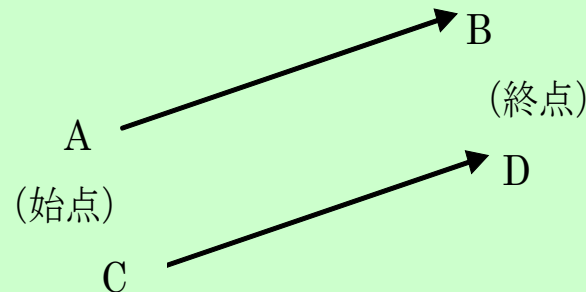
ベクトルとは

- 2つの点AとBをとり, AからBへ矢印を描く. これを **Aを始点, Bを終点とする有向線分**という. 有向線分は, “向き, 長さ(または大きさ), **位置**”をもっているが, **位置**を無視し, “**向きと長さ**”だけを考えて有向線分を

ベクトルといい, $\overrightarrow{AB}$ で表す. あるいは, a, b, c などと記す.

- **向き**(平行)と**長さ**が同じものは, **同一ベクトル**とみなす. 図の $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ は同一である.

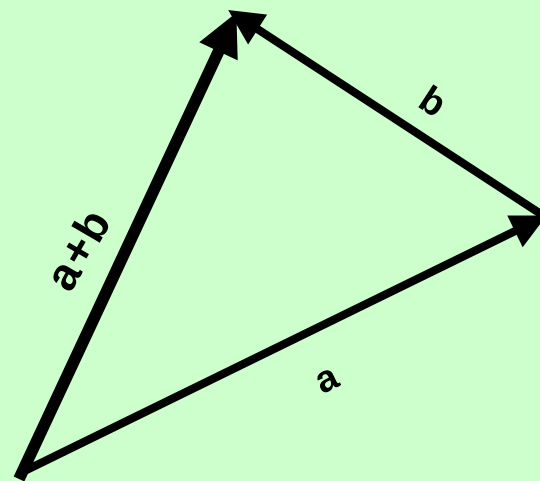
(平行移動して重なれば,
同じベクトルである)



ベクトルの演算(和)

2つのベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$ に対して,
 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の和という.

もし, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が離れていたら,
 $\mathbf{b}$ を平行移動して, $\mathbf{a}$ の始点と
 $\mathbf{b}$ の終点を一致させて,
和を求める.



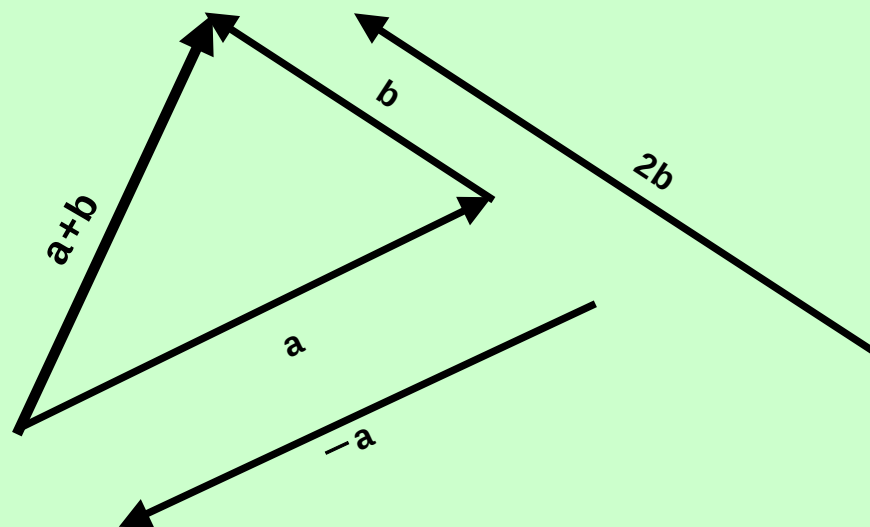
ベクトルの演算(差・スカラー倍)

ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, に対して, $\overrightarrow{BA}$ を $-\mathbf{a}$ と定義する.
 $-\mathbf{a}$ を $\mathbf{a}$ の逆ベクトルという.

$\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ を $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ と書いて, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}$ の差と定義する

□ $\mathbf{b}$ □ 2□ □ □ □ □ □ □ □ □

一般に k 倍の場合の実数 k
をスカラーという.



0ベクトル, 単位ベクトル

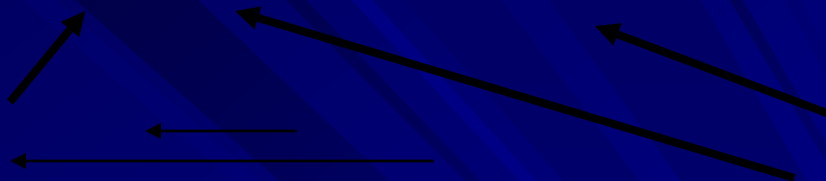
長さ0のベクトルを

0ベクトル,

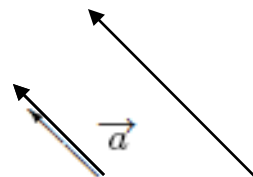
長さ1のベクトルを単位ベクトルといい,

e と書く.

プリントNo4-1



1. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の位置, 大きさで与えられているとき, 以下に示すベクトルの演算結果を図示しなさい.



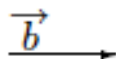
(b) $\vec{a} - \vec{b}$

(a) $\vec{a} + \vec{b}$

(c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$

プリントNo4-1

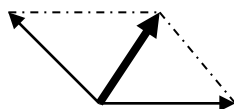
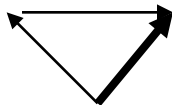
1. ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が次の位置, 大きさで与えられているとき, 以下に示すベクトルの演算結果を図示しなさい.



(a) $\vec{a} + \vec{b}$

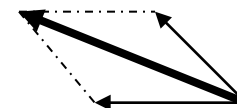
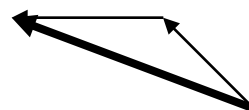
または

平行四辺形にして

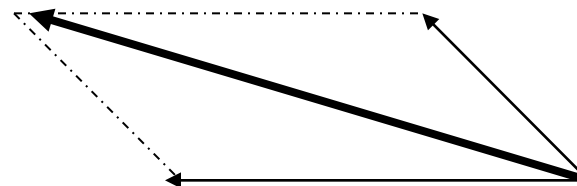


(b) $\vec{a} - \vec{b}$

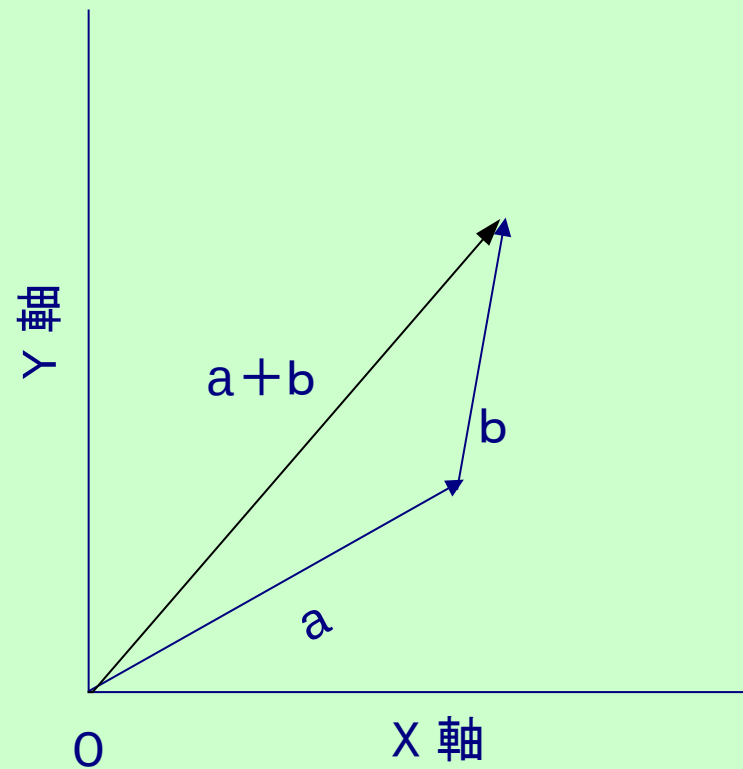
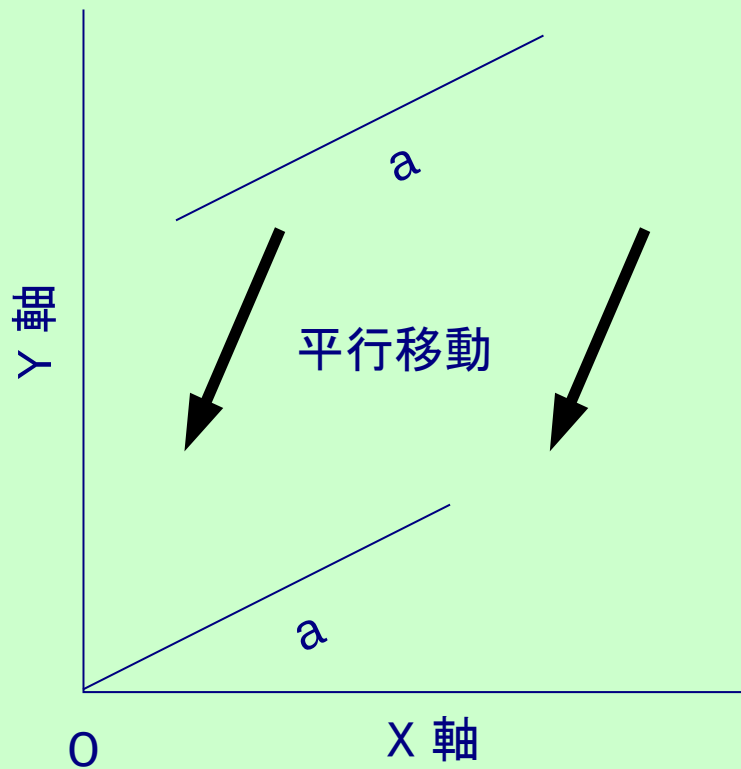
(マイナスは逆向きにし)
同様にして



(c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$



平面ベクトル



位置ベクトル

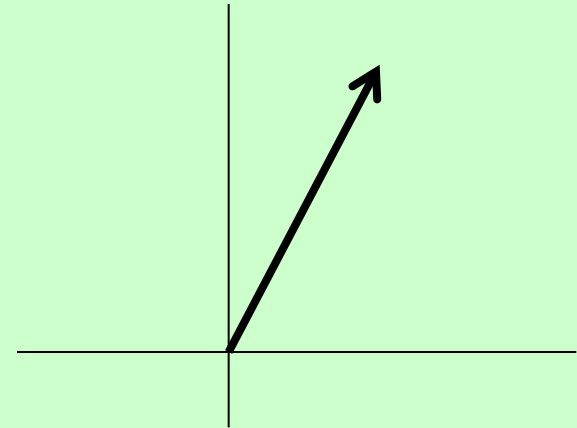
座標平面上にベクトル $\mathbf{a}$ があり， $\mathbf{a}$ の始点を原点 O になるように平行移動する．このとき，

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ と書いて，位置ベクトルと定義する．

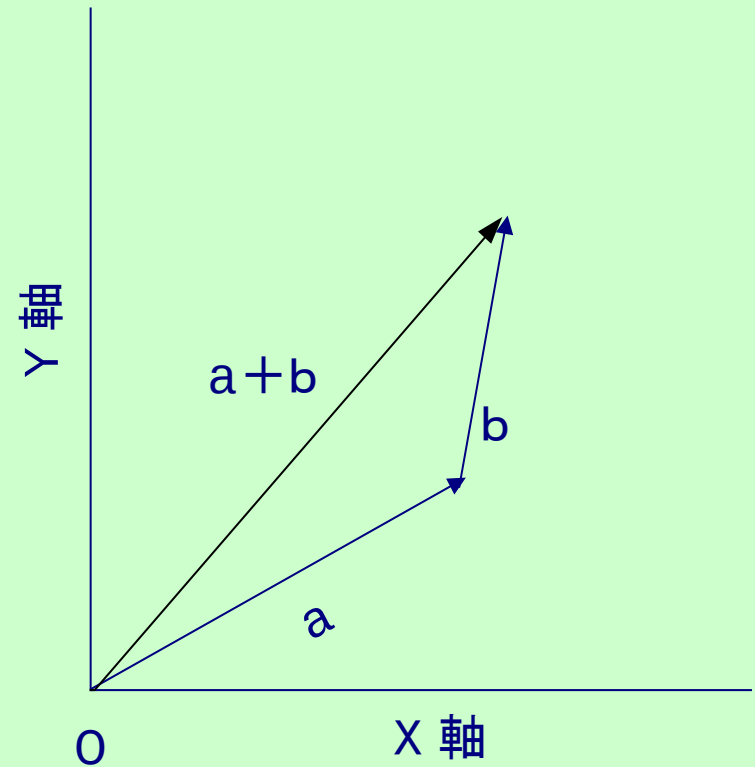
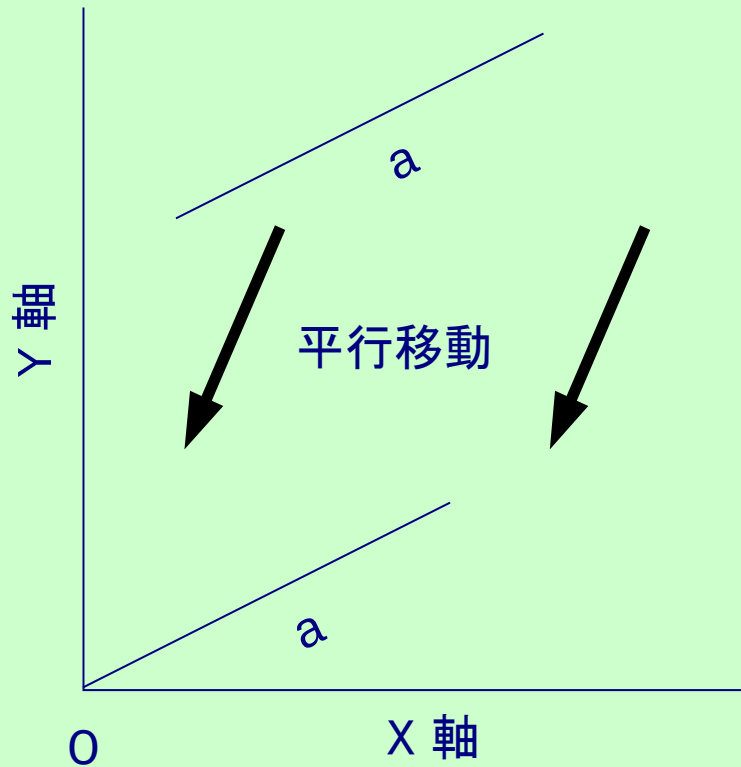
また，点 A の座標が (a_1, a_2) のとき $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ をベクトル $\mathbf{a}$ の成分表示という．また，

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

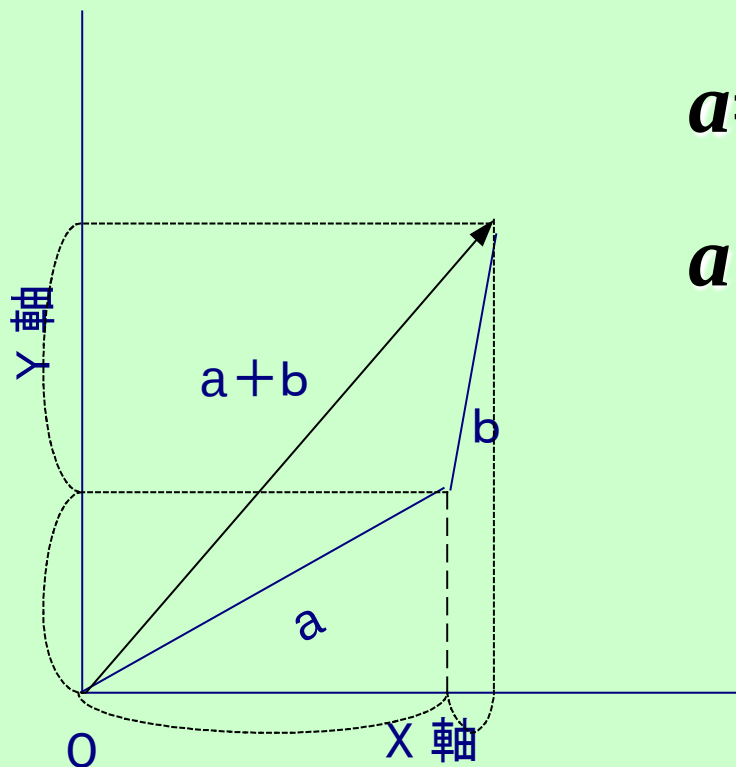
を $\mathbf{a}$ の大きさ（長さ）という．



平面ベクトルの和



平面ベクトルの和の成分表示-1



$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

平面ベクトルの和の成分表示-2

したがって,

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ のとき,

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2)$$

となる. また,

$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2)$, k はスカラー (実数) である.

一方, 点 $A(a_1, a_2)$, 点 $B(b_1, b_2)$ のときは,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

となる.

平面ベクトルの和の成分表示-3

一方, 点 $A(a_1, a_2)$, 点 $B(b_1, b_2)$ のときは,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

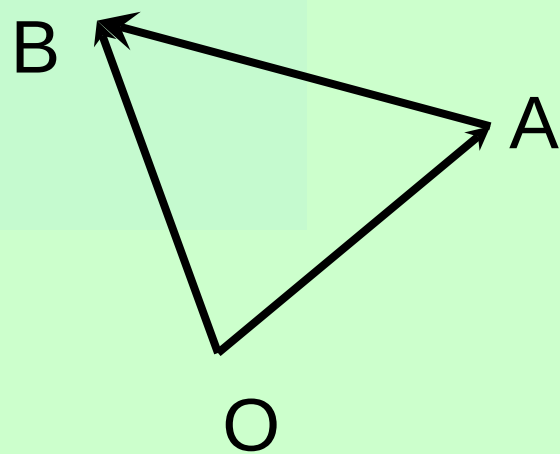
となる.

$\therefore$ 原点を O とすると, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, 変形して

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (b_1, b_2) - (a_1, a_2)$$

$$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$



ベクトル＝＞代数＋幾何

- ベクトルは、大きさと方向のある図形的と考え
ると、幾何学に分類される。
- ベクトルの成分表示をすると、加法・減法など
演算が可能になる。代数学の理論が適用可
能となる。

すなわち、ベクトルという概念によって、
代数と幾何を融合した理論に拡大された

プリントNo4-2

2. 平面座標上の点 $A(2, 3)$, $B(-5, 2)$, $C(4, -2)$ について

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい.

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ を成分表示しなさい.

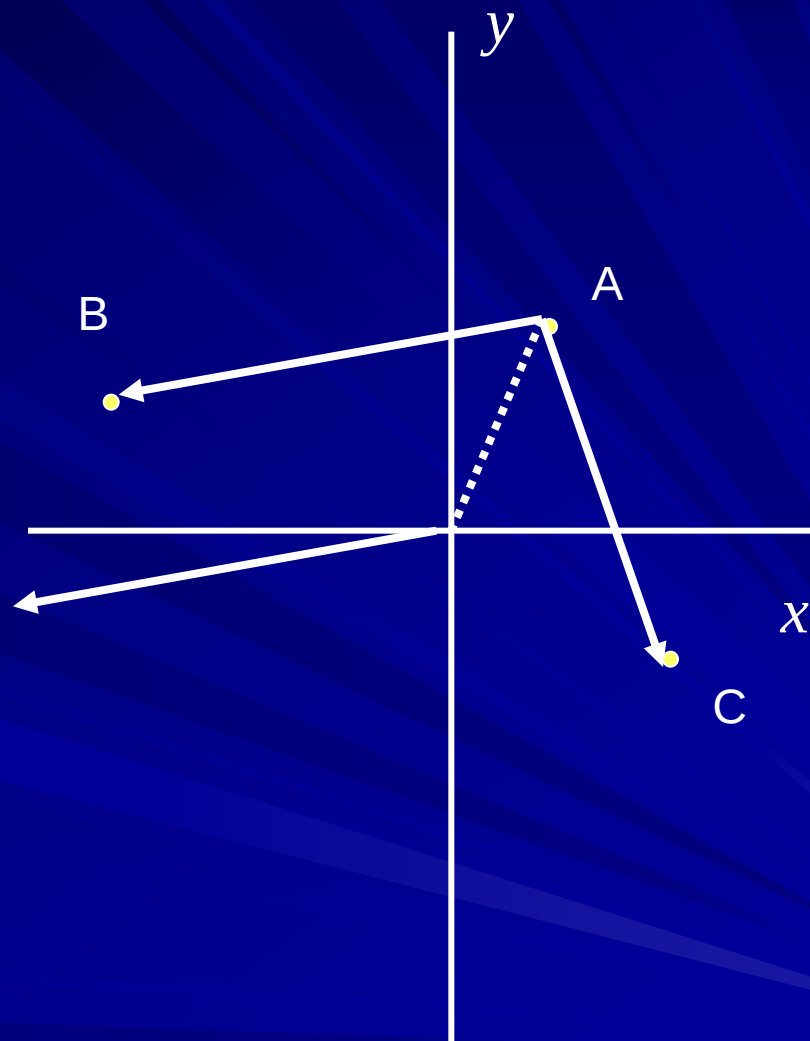
プリントNo4-2(作図)

2. 平面座標上の点 $A(2, 3)$, $B(-5, 2)$, $C(4, -2)$ について

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい.

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ を成分表示しなさい.



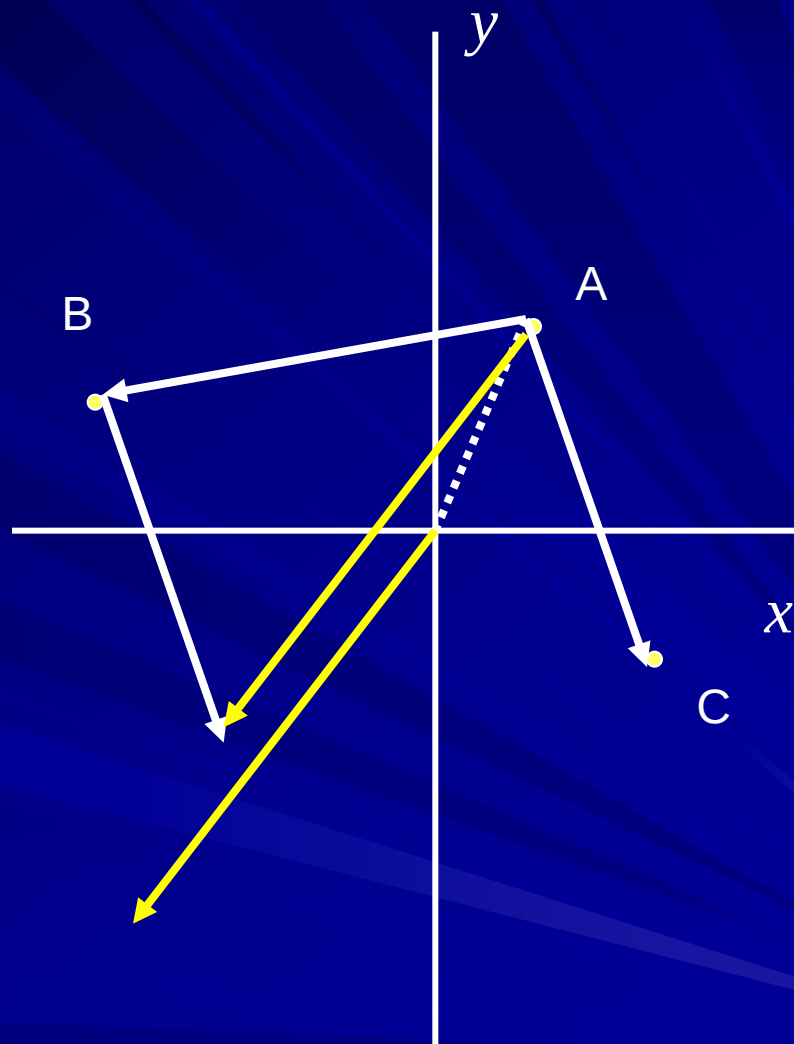
プリントNo4-2(作図)

2. 平面座標上の点 $A(2, 3)$, $B(-5, 2)$, $C(4, -2)$ について

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい.

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ を成分表示しなさい.



プリントNo4-2

2. 平面座標上の点 $A(2, 3)$, $B(-5, 2)$, $C(4, -2)$ について

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい.

$$=(-5-2, 2-3) = (-7, -1)$$

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

$$\sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

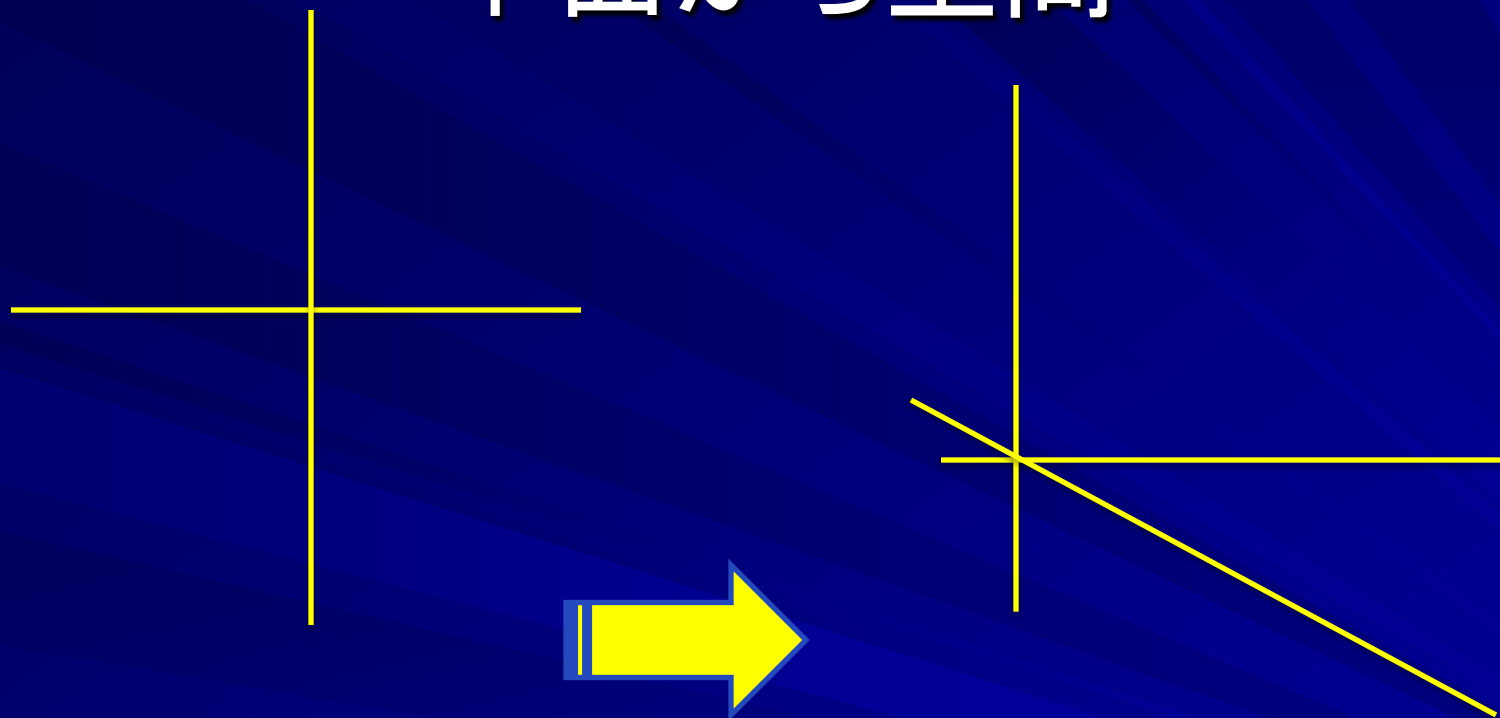
(c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ を成分表示しなさい.

$$= (-7, -1) + (4-2, -2-3)$$

$$= (-7+2, -1-5)$$

$$= (-5, -6)$$

平面から空間へ



座標平面から空間図形と考えると(幾何は)難しいが、
成分表示(代数計算)では、2個が、3個になるだけ！！

プリントNo4-3

3. 次の空間座標上の点について問に答えなさい.

$$A(1, 0, -2), B(0, 3, -1), C(2, 1, 0)$$

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい.

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい.

(c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ を成分表示しなさい.

プリントNo4-3

3. 次の空間座標上の点について問に答えなさい。

$$A(1, 0, -2), B(0, 3, -1), C(2, 1, 0)$$

(a) $\overrightarrow{AB}$ を成分表示しなさい。

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (0, 3, -1) - (1, 0, -2)$$

$$(0-1, 3-0, -1-(-2)) = (-1, 3, 1)$$

(b) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めなさい。

$$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{11} \doteq 3.3$$

(c) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ を成分表示しなさい。

$$= 2(-1, 3, 1) + (-2, 2, -1)$$

$$= (-2-2, 6+2, 2-1)$$

$$= (-4, 8, 1)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \\ &= (0, 3, -1) - (2, 1, 0) \\ &= (-2, 2, -1)\end{aligned}$$

行列とは(定義)

いくつかの数を並べて, カッコでくくったもの.

たとえば, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ は2行3列の行列である.

これを2×3行列, (2,3)型行列などとかく.

$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ は3行2列の行列である.

これを3×2行列, (3,2)型行列などとかく.

一般に, $m \times n$ 個の実数を長方形に並べる.

次回予告

- 次回も、シラバスに従って講義を進めます.
- 演習は、プリントの続きから実施します.
- 本日は、No.4のプリントを配布しました.
- わからなかったところはWebをみて復習しておきましょう.