

# 区分的線形費用をもつネットワーク設計問題に対する 容量スケールリング法

## Capacity Scaling Procedures for the Network Design Problem with Piecewise Linear Costs

片山 直登\* 陳明哲\*\* 久保幹雄\*\*

Naoto KATAYAMA\* Mingzhe CHEN\*\* Mikio KUBO\*\*

\*流通経済大学流通情報学部

\*\*東京海洋大学 海洋工学部

\*Ryutsu Keizai University

\*\*Tokyo University of Marine

\*Email:katayama@rku.ac.jp

Science and Technology

Key words: Piecewise linear costs, Capacity scaling, Network Design, Optimization

要旨:区分的線形費用をもつネットワーク設計問題は、輸送・ロジスティクスや通信の領域で頻繁に発生するネットワークを設計する問題であり、現実的な費用を考慮してネットワークの形状とモノの移動経路を同時に決定する問題である。本研究では、この問題に対する基本的、強い、および拡張した強制制約式を用いた3つのモデルに対して、容量スケールリング法を用いた近似解法を提案する。この容量スケールリング法は、容量を変化させながら線形緩和問題を解き直す方法である。さらに、数値実験によって、従来の解法と比較し、提案した解法の有効性を検討する。

Abstract : The network design problem with piecewise linear costs is an applied problem which is used for transport, logistic and communication design, and is determined the design of a network configuration and multicommodity flows considering real costs. We present capacity scaling procedures for the network design problem with piecewise linear costs. Our procedures consist in solving linear approximate problems with adjusted arc capacities at each iteration. Three type models of formulations involving normal, strong and extended forcing constraints are analyzed by our procedures. Numerical experiments are illustrated that our approach can obtain better solutions than the previous method.

### 1. はじめに

ネットワーク設計問題は、輸送・ロジスティクスや通信などの領域におけるネットワークを設計する問題であり、ネットワークの形状とモノの移動経路を同時に決定する問題である。これらの分野では、複数の始点・終点の組合せをもつモノの移動を対象とすることが多く、これらは多品種問題とよばれる。また、現実的な問題では、宅配便、混載、貸切といったような複数種類の輸送手段や、複数の容量の通信回線を選択することができ、処理量によって費用が最

小となる輸送手段や回線容量を利用することになる。そのため、複数種類の輸送手段や回線容量を考慮した場合、費用は処理量に対して区分的線形である凹関数として表現できることが多い<sup>13)</sup>。このような問題は区分的線形費用をもつネットワーク設計問題とよばれる。本研究では、多品種の需要をもち、区分的線形である費用をもつネットワーク設計問題を対象とする。

ネットワーク設計問題の基本的な問題は、アークの処理能力である容量を考慮しない問題であり、数多くの研究<sup>12)16)17)</sup>が行われている。一方、アークの処理能力を考慮した問題は、容量制約を

もつネットワーク設計問題とよばれる．この問題に対して，Gendron-Crainic<sup>(4)5)</sup>，Gendron-Crainic-Frangioni<sup>(7)</sup>および Holmberg-Yuan<sup>(10)</sup>は，Lagrange 緩和法をもとにした解法を示している．また，近似解法として，Gendron-Crainic のリソース分解法<sup>(6)</sup>，Crainic-Gendreau-Farvolden の基底変換タブサーチ法<sup>(1)</sup>，Ghamlouche-Crainic-Gendreau のサイクル隣接探索法<sup>(9)</sup>およびパス再リンク探索法<sup>(8)</sup>が提案されている．

近年，ネットワーク設計問題に対して，スローブスケール法や容量スケール法といったスケール法が適用され成果を挙げている．ネットワーク設計問題に対するスケール法は，変動費用やアーク容量を変化させながら線形緩和問題を繰り返し解き，デザイン変数の収束解を求める近似解法である．Crainic-Gendron-Hernu<sup>(2)</sup>は，弱い定式化に基づいたスローブスケール法を示している．また，久保<sup>(15)</sup>はサービスネットワーク設計問題に対してパスフローによる定式化に基づいた容量スケール法を提案している．片山<sup>(11)</sup>は弱い定式化と強い定式化に対する容量スケール法を提案し，陳-片山-久保<sup>(18)</sup>は列生成法を加えた解法を提案している．

一方，区分的線形費用をもつ問題に関する従来の研究は比較的少ない．Kim-Pardals<sup>(13)14)</sup>は，単一品種の区分的線形費用をもつ問題に対するスローブスケール法を示している．多品種を対象とした研究として，Croxtton-Gendron-Magnanti<sup>(3)</sup>は基本モデル，強いモデルおよび拡張モデルを示し，この問題の性質を解析し，線形緩和による変数固定と分枝限定法を組み合わせた解法を提案している．

本研究では，区分的線形費用と多品種の需要をもつネットワーク設計問題に対して容量スケール法を適用した近似解法を提案し，数値実験によって提案した解法の有効性を検討する．

## 2. 問題の定式化

発地・着地間を移動すべきモノを需要とよび，需要の発地を始点，着地を終点とよぶ．本研究では，一般的な表現とは異なり，始点・終点の異なるものを異なる品種と定義する．そのため，多品種は複数の

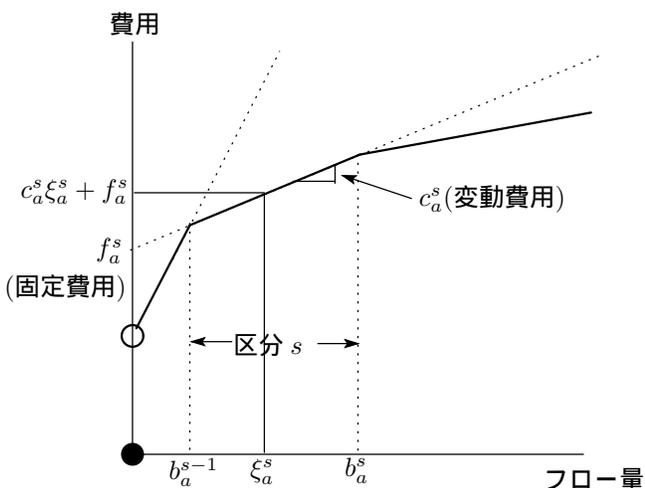


図-1 区分的線形関数

始点と終点の組合せをもつ需要が存在することを意味する．ノードは発地・配送センター・着地やルータ・サーバ・コンピュータなど需要の始点・終点や中継点を表し，アークは輸送路線や通信回線などのノード間をつなぐものを表す．また，フローは，荷物やデータなどのノード間を移動するものやその移動を表す．

アーク上には，フロー量に応じて，複数種類の輸送手段・通信回線から費用が最小となるものを選択して設置できるものとする．このため，費用は図-1に示すようなフロー量に関して区分的線形となる凹関数とする．線形の区間を区分とよぶ．対象とする関数は，必ずしも区分の前後で連続である必要はないが，下半連続であり，各区分に関する変動費用と固定費用は非負とする．

本研究では，区分的線形費用をもつネットワーク設計問題に対して，基本モデル，強いモデルおよび拡張モデルによる3種類の定式化<sup>(3)</sup>を用いる．

ノード集合を  $N$ ，アーク集合を  $A$  とする．アークは向きを持つものとし，ノード  $n$  に入るアークの集合を  $A_n^+$ ， $n$  から出るアークの集合を  $A_n^-$  とする．品種集合を  $K$  とし，品種  $k$  の始点を  $O^k$ ，終点を  $D^k$ ，需要を  $d^k$  とする．アーク  $a$  における区分集合を  $S_a$  とする．また，図-1に示すように区分  $s$  の上限値を  $b_a^s$ ，下限値を  $b_a^{s-1}$  とし， $b_a^0=0$  とする．アーク  $a$  の区分  $s$  における単位フロー量当たりの変動費用を  $c_a^s$ ，固定費用を  $f_a^s$  とする．また，フロー量が0であると

き，これらの費用は発生しない．

アーク  $a$  において，アーク上のフロー量を表す総フロー変数を  $X_a$ ，品種  $k$  のフロー量を表す品種フロー変数を  $x_a^k$  とする．また， $X_a$  が区分  $s$  の範囲にあるとき  $X_a$ ，それ以外は 0 である区分フロー変数を  $\xi_a^s$  とする．さらに， $X_a$  が区分  $s$  の範囲にあるとき 1，それ以外は 0 を表す 0-1 変数である区分変数を  $y_a^s$  とする．

$$\xi_a^s = \begin{cases} X_a & \text{if } b_a^{s-1} < X_a \leq b_a^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad s \in S_a, a \in A$$

$$y_a^s = \begin{cases} 1 & \text{if } b_a^{s-1} < X_a \leq b_a^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad s \in S_a, a \in A$$

$y_a^s = 1$  であるときには，アーク  $a$  における区分  $s$  の区分フローが存在し，この区分フローに対する費用関数が発生する．区分フロー  $\xi_a^s$  に対する費用は， $b_a^{s-1} < \xi_a^s = X_a \leq b_a^s$  のとき  $c_a^s \xi_a^s + f_a^s$ ，そうでないとき 0 となるため， $c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s$  と表すことができる．

区分的線形費用をもつネットワーク設計問題に対する定式化は，次のように表される．この基本的な定式化によるモデルを基本モデル *PLCB* とよぶ．*PLCB* は，次のように表わされる．

*PLCB*

$$\min \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s) \quad (1)$$

$$\text{st } \sum_{a \in A_n^+} x_a^k - \sum_{a \in A_n^-} x_a^k = \begin{cases} -d^k & \text{if } n = O^k \\ d^k & \text{if } n = D^k \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad n \in N, k \in K \quad (2)$$

$$X_a = \sum_{k \in K} x_a^k \quad a \in A \quad (3)$$

$$X_a = \sum_{s \in S_a} \xi_a^s \quad a \in A \quad (4)$$

$$b_a^{s-1} y_a^s \leq \xi_a^s \leq b_a^s y_a^s \quad s \in S_a, a \in A \quad (5)$$

$$\sum_{s \in S_a} y_a^s \leq 1 \quad a \in A \quad (6)$$

$$x_a^k \geq 0 \quad k \in K, a \in A \quad (7)$$

$$y_a^s \in \{0, 1\} \quad s \in S_a, a \in A \quad (8)$$

(1) 式は，変動費用と固定費用の和である総費用を最小化する目的関数である．第一項は変動費用，第二項は固定費用である．(2) 式は，品種  $k$  について，ノード  $n$  に入るフロー量と出るフロー量の差が，ノード  $n$  が始点であれば  $-d^k$ ，終点であれば  $d^k$ ，その他のノードであれば 0 であることを表す．この式はフロー保存式とよばれ，必ず需要が始点から終点に流れることを保証する．(3) 式は，アーク上の品種フロー量の合計が総フロー量に一致することを表す．(4) 式は，区分フロー量の合計が総フロー量に一致することを表す．(5) 式は，区分変数が 1 である場合，区分フロー量は区分の上限値と下限値の間の範囲に限定され，そうでない場合は 0 となることを表す強制制約式である．(5) 式には区分フローの下限に等号が含まれているが，これは  $y_a^s = 0$  のとき， $\xi_a^s = 0$  とするためである．区分フローの定義から  $b_a^{s-1} < \xi_a^s \leq b_a^s$  (または 0) であるため，区分  $s$  の下端のフロー量 ( $\xi_a^s = b_a^{s-1}$ ) は定義に反する．しかし，費用関数は下半連続であり，かつ最小化問題であるため，最適解において区分  $s-1$  の上端のフロー量である  $\xi_a^{s-1} = b_a^{s-1}$  を採用すればよいため，妥当な問題表現となる．(6) 式は，各アークに対して区分変数の合計が 0 または 1 であることを表し，1 となる区分変数は高々 1 つであることを表す．(7) 式は品種フロー変数が非負の実数であることを表し，(8) 式は区分変数の 0-1 条件を表す．

最適値とその連続緩和問題の最適値との差が大きな定式化を弱い定式化よぶ．基本モデルの定式化は弱い定式化であることが知られている．そこで，次のような制約式を追加する．

$$x_a^k \leq d^k \sum_{s \in S_a} y_a^s \quad a \in A, k \in K \quad (9)$$

(9) 式は，アーク  $a$  における品種  $k$  の品種フローの上限値を表す強制制約式である．これは，アーク  $a$  において， $S_a$  に含まれるいずれかの区分変数が 1 であれば品種  $k$  の品種フローの上限値は  $d^k$  であり，すべての区分変数が 0 であれば品種  $k$  のフローが存在しない，すなわち， $x_a^k = 0$  であることを表す．

この強制制約式を加えたモデルを強いモデル *PLCS* とよぶ．*PLCS* は，次のように表される．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s) \\ \text{st} \quad & x_a^k \leq d^k \sum_{s \in S_a} y_a^s \quad k \in K, a \in A \end{aligned}$$

(2)~(8) 式

アーク  $a$  における品種  $k$ , 区分  $s$  に対する区分品種フロー変数を  $\zeta_a^{ks}$  とおく.  $\zeta_a^{ks}$  は, アーク  $a$  における総フロー  $X_a$  が区分  $s$  の範囲にあるときに品種  $k$  の品種フロー  $x_a^k$  となり, それ以外は 0 となる変数である.

$$\zeta_a^{ks} = \begin{cases} x_a^k & \text{if } b_a^{s-1} < X_a \leq b_a^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad s \in S_a, a \in A, k \in K$$

区分品種フロー変数と, 区分フロー変数, 品種フロー変数の関係は次式となる.

$$\begin{aligned} \zeta_a^s &= \sum_{k \in K} \zeta_a^{ks} \quad s \in S_a, a \in A \\ x_a^k &= \sum_{s \in S_a} \zeta_a^{ks} \quad k \in K, a \in A \end{aligned}$$

区分品種フロー変数を用いると, 次のように (9) 式を区分について非集約化することができる.

$$\zeta_a^{ks} \leq d^k y_a^s \quad k \in K, s \in S_a, a \in A$$

この制約は, (9) 式よりも強い強制制約式となる.

区分品種フロー変数を用いたモデルを拡張モデル  $PLCE$  とよぶ.  $PLCE$  は, 次のように表される.  $PLCE$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s) \\ \text{st} \quad & \xi_a^s = \sum_{k \in K} \zeta_a^{ks} \quad s \in S_a, a \in A \\ & x_a^k = \sum_{s \in S_a} \zeta_a^{ks} \quad k \in K, a \in A \\ & 0 \leq \zeta_a^{ks} \leq d^k y_a^s \quad k \in K, s \in S_a, a \in A \end{aligned}$$

(2)~(8) 式

フロー変数は非負の実数であり, 区分変数は 0-1 変数であるため, 3 つの定式化とも混合整数計画問題となる.  $|S|$  を区分数の上限値とすると, 0-1 変数は  $O(|A||S|)$  個であり, 連続変数の数は  $PLCB$  と  $PLCS$  では  $O(|A||K| + |A||S|)$ ,  $PLCE$  では

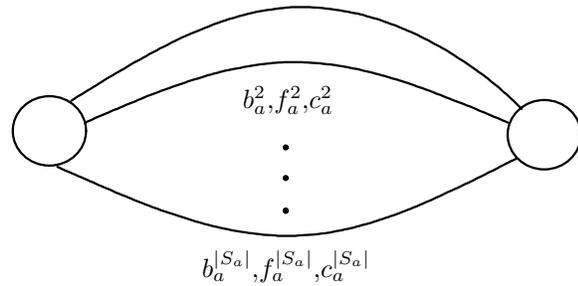
容量  $b_a^1$ , 固定費用  $f_a^1$ , 変動費用  $c_a^1$ 

図-2 ダミーアーク

$O(|A||K||S|)$  個となる. また, 制約式の数は,  $PLCB$  では  $O(|N||K| + |A||S|)$ ,  $PLCS$  では  $O(|A||K| + |A||S|)$ ,  $PLCE$  では  $O(|A||K||S|)$  となる. このため, 実用規模の問題に対して, これらの定式化は大規模な混合整数計画問題となるため, 汎用の数理計画ソフトウェアを用いて直接的に最適解を求めることは困難となる. そこで, 近似解法が必要となる.

### 3. 容量スケールリング法

#### 3.1 容量制約と多重ダミーアーク

区分数が 1 である区分的線形費用をもつ問題を考えると, この問題は区分の上限値が容量である容量制約をもつネットワーク設計問題と見なすことができる. そこで, 区分的線形費用をもつ問題に対して, アークにおける各区分を 1 本のダミーアークと見なし, 図-2 に示すように, 1 本のアークに対して多重のダミーアークを設定する. ダミーアークの容量を対応する区分の上限値とし, 固定費用と変動費用は対応する区分のものと同じとする.

$PLCB$  において多重アークに置き換えた問題を  $PLCBD$  とおくと,  $PLCBD$  は (5) 式を次式で置き換えた問題となる.

$$0 \leq \xi_a^s \leq b_a^s y_a^s \quad a \in A, s \in S_a \quad (10)$$

ここで, 区分変数  $y_a^s$  はアーク  $a$  のダミーアーク  $s$  に対する 0-1 変数となる.

$PLCBD$  は最小化問題であることから, この問題の最適解では, 各ノード間の多重アークの中で, フロー量に対して費用が最小となるダミーアークにフローが流れることになる. 一方,  $PLCB$  においても, 最適解において, フロー量に対して費用が最小とな

る区分上にフローが存在する．これは， $PLCBD$  が  $PCLB$  と等価な問題となる<sup>14)</sup>ことを意味する．

$PLCBD$  はアークが容量をもつ問題となるので，容量制約をもつネットワーク設計問題に対する容量スケールリング法を適用することができる．

### 3.2 容量スケールリング法

容量スケールリング法は容量制約をもつネットワーク設計問題に適用され，有効性が示されている近似解法である<sup>11)15)</sup>．アークの容量制約をもつ問題において，なんらかの手段を用いて問題の最適フローを求めることができれば，容量をこのフロー量に変更しても最適値は変わらない．さらに，このように容量を変更した問題の線形緩和問題を考える．この線形緩和問題においても最適フローは実行可能解となることから，緩和問題の解においてフロー量と容量が一致し，0-1 変数が 1 となることが期待できる．ただし，フロー量が 0 である場合，0-1 変数は 0 と考える．

しかし，最適フローを求めること自体が問題の目的であるため，直接，最適フローを求めることはできない．そこで，逆に，線形緩和問題において，容量を少しずつ変更しながら問題を解き直し，容量が最適フロー量に近づくように容量を設定することができれば，元の問題の最適フローに近いフローが見つかることが期待できる．容量スケールリング法は，このように線形緩和問題のフロー解をもとに容量を変更して繰り返し線形緩和問題を解き，0-1 変数解を導く近似解法である．

はじめに，基本モデル  $PLCB$  に対する容量スケールリング法を示す． $PLCBD$  において，0-1 変数でダミーアークに対応する区分変数  $y_a^s (s \in S_a, a \in A)$  を線形緩和し， $0 \leq y_a^s \leq 1$  とした線形緩和問題を考える．この緩和問題は最小化問題であり， $y_a^s$  の下限に関する制約式は (10) 式のみである．このため，区分フロー変数と区分変数の関係は，(10) 式から  $y_a^s = \xi_a^s / b_a^s$  となり，図-3 に示すように線形関数で表わすことができる．線形緩和問題における区分フローの解を  $\tilde{\xi}_a^s$  としたとき，対応する区分変数の線形緩和問題は  $\tilde{y}_a^s = \tilde{\xi}_a^s / b_a^s$  となる． $y_a^s$  は本来 0 または 1 であるため， $\tilde{y}_a^s$  が小数値を取った場合，これらの間にギャップが存在する．

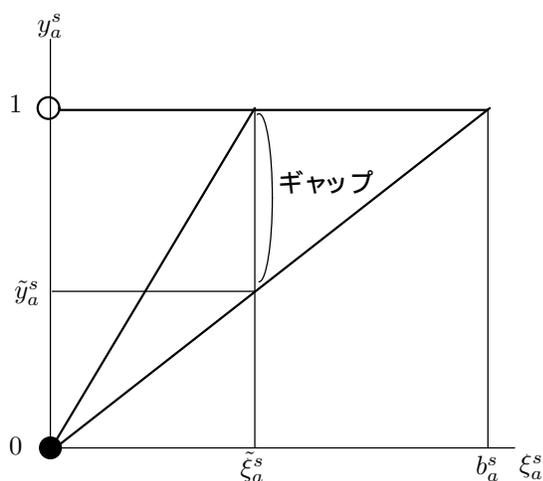


図-3 線形緩和

そこで，区分フローが変化しないものと想定すると，ギャップが存在する場合，アーク容量  $b_a^s$  を  $\tilde{\xi}_a^s$  に変更すれば， $\tilde{y}_a^s = 1$  となり，このギャップを埋めることが期待できる．

実際には，容量を変更させた問題を解き直すと，区分フロー自体が変化してしまい，ギャップが埋まる保証はない．そこで，パラメータ  $\lambda$  を用いて，徐々に容量  $b_a^s$  を変更した問題を解き直し，新たな解における区分フローが大きく変化しないように制御する．

アーク  $a$ ，区分  $s$  に対応するダミーアークの変更した容量を  $\hat{b}_a^s$  とおき， $\hat{b}_a^s$  の初期値を  $b_a^s$  とする．容量を  $\hat{b}_a^s$  とした線形緩和問題を解き直し，新たな区分フロー  $\hat{\xi}_a^s$  を求める．続いて，パラメータ  $\lambda (0 < \lambda \leq 1)$  を用いて， $\hat{b}_a^s$  を次のように更新する．

$$\hat{b}_a^s := \lambda \hat{\xi}_a^s + (1 - \lambda) \hat{b}_a^s \quad a \in A, s \in S_a$$

この式は，変更した容量  $\hat{b}_a^s$  を，区分フロー  $\hat{\xi}_a^s$  と現在の容量  $\hat{b}_a^s$  の凸結合によって定めることを意味する． $\lambda$  によって， $\hat{b}_a^s$  の急激な変更を防ぎ，フローの大きな変化を防止する．

容量の変更を行っているが， $\xi_a^s$  は本来の容量  $b_a^s$  以下であればよい．そこで， $y_a^s$  の上限値である 1 を変更し， $y_a^s \leq b_a^s / \hat{b}_a^s$  に緩和する．このとき， $y_a^s$  は 1 以上の値を取ることができが，区分フロー  $\xi_a^s$  は本来の容量  $b_a^s$  以下であることが保証される．なお，この変更を (6) 式にも反映し，(6) 式における  $y_a^s$  の係数を  $\hat{b}_a^s / b_a^s$  に変更する．

このように，容量スケールリング法では，変更した

容量以上のフローを認める．このため，容量  $\hat{b}_a^s$  は，厳密な意味での容量ではなく， $y_a^s$  の取り得る範囲を変更させることにより，固定費用  $f_a^s y_a^s$  を変化させるパラメータ的な機能を果たしていることになる．

容量  $\hat{b} = (\hat{b}_a^s)$  とした *PLCBD* の線形緩和問題を *PLCBL*( $\hat{b}$ ) とする．

*PLCBL*( $\hat{b}$ )

$$\min \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s)$$

$$\text{st } 0 \leq \xi_a^s \leq \hat{b}_a^s y_a^s \quad a \in A, \quad s \in S_a \quad (11)$$

$$\sum_{s \in S_a} (\hat{b}_a^s / b_a^s) y_a^s \leq 1 \quad a \in A \quad (12)$$

$$0 \leq y_a^s \leq b_a^s / \hat{b}_a^s \quad a \in A, \quad s \in S_a \quad (13)$$

(2) ~ (4) and (7) 式

この問題は線形計画問題であるため，汎用の数理計画ソフトウェアを用いて解くことができる．

### 3.3 近似解の算出

容量スケールリング法では，容量  $\hat{b}$  を変更して，*PLCBL*( $\hat{b}$ ) を繰り返し解き直す．*PLCBL*( $\hat{b}$ ) は最小化問題であることから，最適解において  $y_a^s = \xi_a^s / \hat{b}_a^s$  が成り立ち，目的関数値は  $\sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s + f_a^s / \hat{b}_a^s) \xi_a^s$  と等価になる．このため，最適解では多重アークの中で  $c_a^s + f_a^s / \hat{b}_a^s$  (図-4 参照) の値が最小であるダミアーク  $\hat{s}$  にフローが集中する．単純に線形緩和が正である区分変数を 1 としてしまうと，*PLCB* において総フロー量と区分変数の範囲が対応しない可能性が生じる．そこで，総フローの線形緩和を  $\hat{X}_a$  とし， $\hat{X}_a$  がどの区分の範囲にあるかによって，区分変数の値を設定する．図-4 に示すように， $\hat{X}_a$  が上限  $b_a^s$  と下限  $b_a^{s-1}$  の範囲にある区分に対応する区分変数を 1，それ以外を 0 とした区分変数を  $\bar{y}_a^s$  とする．

$$\bar{y}_a^s = \begin{cases} 1 & \text{if } b_a^{s-1} < \hat{X}_a \leq b_a^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad s \in S_a, a \in A$$

このとき， $\bar{y}$  は *PLCB* の制約式である (6) 式と (8) 式を満足する．

次に，区分変数を  $\bar{y} = (\bar{y}_a^s)$  としたネットワーク上で，次のような多品種フロー問題 *MCF*( $\bar{y}$ ) を作成する．

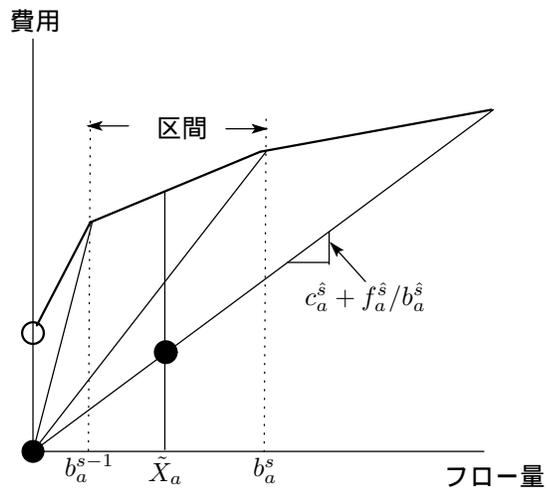


図-4 線形緩和問題

*MCF*( $\bar{y}$ )

$$\min \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s \bar{y}_a^s)$$

$$\text{st } b_a^{s-1} < \xi_a^s \leq b_a^s \quad \text{if } \bar{y}_a^s = 1, \quad a \in A, \quad s \in S_a$$

$$\xi_a^s = 0 \quad \text{if } \bar{y}_a^s = 0, \quad a \in A, \quad s \in S_a$$

(2) ~ (4) and (7) 式

*MCF*( $\bar{y}$ ) は線形計画問題であるため，汎用の数理計画ソフトウェアを用いて解くことができる．*MCF*( $\bar{y}$ ) の実行可能解を求めることができれば， $\bar{y}$  および *MCF*( $\bar{y}$ ) のフロー解は *PLCB* の実行可能解となり，その目的関数値は *PLCB* の上界値となる．

一方，容量スケールリング法では，繰り返し回数とともに，多くの 0-1 変数である区分変数が 0 または 1 に収束する傾向がある．汎用の数理計画ソフトウェアの分枝限定法を用いると，少数の 0-1 変数をもつ計画問題に対しては比較的短時間で最適解を求めることができる．そこで，0 または 1 に収束していない区分変数の合計を  $B$  とし， $B$  がある決められた数以下となった繰り返し回数において，各アークに関して，次のように *PLCB* における区分変数の範囲を制限した問題 *PLCBF* を作成する．

$$\begin{cases} y_a^s = 0 \quad s \in S \quad \text{if } \sum_{s \in S_a} \hat{y}_a^s < \epsilon_1 \\ \sum_{s \in S_a} y_a^s = 1 \quad \text{if } \hat{y}_a^s \geq \epsilon_2 \quad \exists s \in S \end{cases} \quad a \in A \quad (14)$$

ここで， $\hat{y}_a^s$  は *PLCBL*( $\hat{b}$ ) の区分変数解， $\epsilon_1$  と  $\epsilon_2$  は  $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$  である定数である．*PLCBF* に対して，分枝限定法を適用すれば，*PLCB* の近似解と

上界値を求めることができる。

しかし、このように 0-1 変数を限定した問題であっても、問題の規模や性質によって、分枝限定法により最適解を求めることが困難な場合がある。そのため、分枝限定法は一定時間で打ち切ることとし、その時点で得られた最良の解を近似解とする。また、 $B$  を一定値とした場合、連続した繰り返し回数において分枝限定法を繰り返し、同一の解を生成することが多くなる。そこで、分枝限定法を適用するごとに  $B$  を  $\alpha(0 < \alpha < 1)$  倍して減少させ、解の多様性を確保する。

### 3.4 容量スケールリング法

$PLCB$  に対する容量スケールリング法を示す。

<p>[ステップ 1] パラメータ <math>\lambda, \epsilon_1, \epsilon_2, \alpha</math> および <math>B</math> を決め、<math>\hat{b}_a^s := b_a^s (s \in S_a, a \in A)</math>, <math>ub_{min} := \infty</math>, <math>t := 0</math> とする。</p> <p>[ステップ 2] <math>t := t + 1</math> とする。<math>PLCBL(\hat{b})</math> を解き、解 <math>\hat{y}_a^s, \hat{\xi}_a^s (s \in S_a, a \in A)</math> と <math>\hat{X}_a (a \in A)</math> を求める。</p> <p>[ステップ 3] <math>\hat{b}_a^s := \lambda \hat{\xi}_a^s + (1 - \lambda) \hat{b}_a^s (s \in S_a, a \in A)</math> とする。</p> <p>[ステップ 4] <math>\bar{y}</math> を求め、<math>MCF(\bar{y})</math> を解き、上界値 <math>ub_t</math> を求める。<math>ub_{min} &gt; ub_t</math> であれば、<math>ub_{min} := ub_t</math> とする。</p> <p>[ステップ 5] <math>\epsilon_1 &lt; \hat{y}_{at}^s &lt; \epsilon_2</math> である区別変数が <math>B</math> 個以下であれば、<math>PLCBF</math> を作成し、分枝限定法を適用し、上界値 <math>ub_f</math> を求める。<math>ub_{min} &gt; ub_f</math> であれば、<math>ub_{min} := ub_f</math> とする。<math>B := \alpha B</math> とする。</p> <p>[ステップ 6] <math>t = t_{max}</math> であれば終了、そうでなければステップ 2 へ戻る。</p>
--

ここで、 $t$  は現在の繰り返し回数、 $t_{max}$  は最大繰り返し回数であり、 $ub_{min}$  は最良の上界値、 $ub_f$  は  $PLCBF$  の目的関数値である。

$PLCB$  と同様に、強いモデル  $PLCS$  に対して、多重アークを用い、容量を  $\hat{b}$  とした問題の線形緩和問題を  $PLCSL(\hat{b})$  とする。

$PLCSL(\hat{b})$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s) \\ \text{st} \quad & x_a^k \leq d^k \sum_{s \in S_a} y_a^s \quad a \in A, k \in K \end{aligned} \quad (15)$$

(2) ~ (4), (7) and (11) ~ (13) 式

同様に、拡張モデル  $PLCE$  に対して、多重アークを用い、容量を  $\hat{b}$  とした問題の線形緩和問題を  $PLCEL(\hat{b})$  とする。

$PLCEL(\hat{b})$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} \sum_{s \in S_a} (c_a^s \xi_a^s + f_a^s y_a^s) \\ \text{st} \quad & \xi_a^s = \sum_{k \in K} \zeta_a^{ks} \quad a \in A, s \in S_a \\ & x_a^k = \sum_{s \in S_a} \zeta_a^{ks} \quad a \in A, k \in K \\ & 0 \leq \zeta_a^{ks} \leq d^k y_a^s \quad a \in A, k \in K, s \in S_a \end{aligned} \quad (16)$$

(2) ~ (4), (7) and (11) ~ (13) 式

$PLCSL(\hat{b})$  と  $PLCEL(\hat{b})$  は線形計画問題であるため、汎用の数理計画ソフトウェアを用いて解くことができる。

$PLCS$  と  $PLCE$  に対する容量スケールリング法は、 $PLCBL(\hat{b})$  のかわりに  $PLCSL(\hat{b})$  と  $PLCEL(\hat{b})$ ,  $PLCBF$  のかわりに  $PLCS$  と  $PLCE$  に (14) 式を付加した問題を用いる以外は、 $PLCB$  のものと同様である。ただし、区別変数に関する強制制約式である (15) 式と (16) 式を追加しているため、緩和解において、多重アークの中で複数のダミーアークのフロー量が正となり、複数の区別変数が正になる可能性がある。しかし、 $PLCB$  の場合と同様に、総フロー変数の線形緩和問題を用いて区別変数を設定すれば、制約式を満足する区別変数を一意に設定することができる。

## 4. 数値実験

提案した解法の有効性を検証するために、次のような条件のもとで数値実験を行った。

- 1) データ：Crainic ら<sup>1)</sup>のデータをもとに、次のようなデータを作成した。

表-1 容量スケーリング法の計算結果

問題	N	A	K	問題の タイプ	PLCB		PLCS		PLCE	
					誤差	時間	誤差	時間	誤差	時間
1	25	100	10	VL	0.9	1.2	0.2	4.2	0.0	0.1
2	25	100	10	FT	5.6	2.3	0.0	3.0	0.0	13.6
3	25	100	10	FL	5.2	2.0	0.0	3.0	0.0	37.5
4	25	100	30	VT	0.9	28.6	2.5	45.1	0.1	82.9
5	25	100	30	FT	3.2	22.5	1.6	38.0	0.0	232.8
6	25	100	30	FL	0.2	16.1	1.1	1.4	0.6	293.8
7	100	400	10	VL	0.0	14.0	0.0	288.1	0.0	8.4
8	100	400	10	FT	16.3	80.2	4.2	34.6	0.0	1390.3
9	100	400	10	FL	10.3	31.4	0.0	25.2	0.0	16.5
10	100	400	30	VT	4.1	313.3	2.5	8440.6	0.7	19196.9
11	100	400	30	FT	25.3	938.8	15.9	9082.7	10.8	36266.4
12	100	400	30	FL	21.7	440.7	12.5	58.7	8.9	35096.1

誤差：(%) 計算時間：(秒)

- a) ノード数, アーク数, 品種数: (25,100,10), (25,100,30), (100,40,10), (100,40,30) の組合せに対して, 各 3 問
- b) 区分数: すべてのアークに対して, 3
- c) 区分の上限値:  $b_a^s = (2^s - 1)b_a/2$ ,  $b_a$  は元のデータのアーク容量
- d) 変動費用:  $c_a\beta^{s-1}$  とする.  $c_a$  は元のデータの変動費用,  $\beta = 0.7$
- e) 固定費用: 第 1 区分の固定費用を元のデータの固定費用とし, 他の区分の固定費用は費用関数が  $b_a^s$  で連続になるように設定
- 2)  $\lambda : 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.30$
- 3)  $\epsilon_1, \epsilon_2 : 0.01$
- 4)  $\alpha : 0.75$
- 5) 分枝限定法の実施基準の初期値  $B : 50$
- 6) 分枝限定法の計算時間: 最大 30 分
- 7) 最大繰り返し回数  $t_{max} : 250$  回, ただし, 計算時間が 10 時間を超える場合は, 繰り返し回数 100 回または 12 時間で打ち切り
- 8) 言語: Visual Studio 2005 C++
- 9) 数理計画ソフトウェア: CPLEX10.0
- 10) 使用コンピュータ: CPU Pentium Dual-Core 3.0GHz, メモリ 4GB

提案した容量スケーリング法による結果を表 1 に示す. 表の数値は, ノード数 ( $|N|$ ), アーク数 ( $|A|$ ), 品種数 ( $|K|$ ), 問題のタイプと, 各モデルによる誤差と計算時間である. タイプ欄の記号は, 相対的に  $F$

は固定費,  $V$  は変動費が高い,  $T$  は区分の上限値が小さい,  $L$  は区分の上限値が大きいデータであることを示す. 誤差は,  $(\text{上界値} - \text{下界値}) / \text{下界値} \times 100(\%)$  である. 上界値は, パラメータを変化させた中の最良の上界値である. 下界値は,  $PLCE$  を直接 CPLEX を用いて最大 48 時間解いたときの最良の下界値または最適値である.

問題のタイプでみると, 基本モデル  $PLCB$  では,  $VL, VT$  に対して誤差は 0.0~4.1%と小さいが,  $FT$  に対しては 3.2~25.3%,  $FL$  に対しては 0.2~21.7%となった. 強いモデル  $PLCS$  では,  $VL, VT$  に対して 0.0~2.5%,  $FT$  に対して 0.0~15.9%,  $FL$  に対して 0.0~12.5%となった. 拡張モデル  $PLCE$  では,  $VL, VT$  に対して 0.0~0.7%,  $FT$  に対して 0.0~10.8%,  $FL$  に対して 0.0~8.9%となった.

一方, 問題の規模でみると, 規模の小さな問題 1~9 に対して,  $PLCB$  による誤差は 0.0~16.3%と比較的大きいが,  $PLCS$  では 0.0~4.2%に減少した. さらに,  $PLCE$  では 0.0~0.6%となり, 多くの問題で最適解を求めることができた. 規模の大きな問題 10~12 に対して,  $PLCB$  による誤差は 4.1~25.3%,  $PLCS$  では 2.5~15.9%と比較的誤差が大きい, 拡張モデル  $PLCE$  では 0.7~10.8%に減少した. しかし, 規模の大きな問題では, 変数, 制約式ともに大幅に増加するため, 計算時間は大幅に増加している.

Croxtion-Gendron-Magnanti<sup>3)</sup> は本研究と同様の 3 つのモデルに対して, 閾値と分枝限定法を組み合わせ

表-2 従来法の計算結果

問題	PLCB		PLCS		PLCE	
	誤差	時間	誤差	時間	誤差	時間
1	×	×	×	×	0.0	0.3
2	×	×	5.3	0.1	7.4	0.6
3	×	×	×	×	×	×
4	×	×	×	×	1.8	1.2
5	×	×	6.8	0.7	1.3	2.7
6	×	×	7.9	45.1	×	×
7	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	×
9	×	×	×	×	5.4	5.8
10	×	×	×	×	×	×
11	×	×	×	×	14.0	36145.6
12	×	×	×	×	9.1	22919.7

誤差：(%) 計算時間：(秒)

せた近似解法 (以下, 従来法) を提案している. この従来法は, *PLCB*, *PLCS* および *PLCE* の線形緩和問題を解き, 求めた区分変数の線形緩和が 0 であれば区分変数を 0 に固定し, 閾値 (0.7) 以上であれば区分変数を 1 に固定し, それ以外の区分変数を 0-1 変数に設定した問題に対して, 分枝限定法を適用する方法である.

従来法による結果を表 2 に示す. × は実行不可能であったため, 実行可能解が求められなかったことを表す. *PLCB* を用いた場合, 従来法では, すべての問題に対して実行不可能となった. *PLCS* では, 問題 2, 5, 6 のみで実行可能解を求めることができたが, その他の問題では実行可能解を求めることができなかった. また, *PLCE* では, 12 問中, 5 問で実行可能解を求めることができなかった. このように, 従来法では多くの問題で実行可能解を求めることができなかったが, これは文献<sup>3)</sup>でも指摘されている問題点である.

従来法で解が求められた問題で比べると, *PLCS* では, 容量スケール法では従来法よりも誤差が 5.3 ~ 6.8% 小さい解を求めることができた. また, *PLCE* では, 従来法よりも誤差が 0.0 ~ 7.4% 小さい解を求めることができた. 従来法の計算時間は容量スケール法より短いものが多いが, 規模の大きな問題 11, 12 では容量スケール法と同様に計算時間が長くなっている.

## 5. おわりに

本研究では, 区分的線形費用をもつネットワーク設計問題に対して, 容量スケール法を用いた近似解法を提案した. これは, 区分をダミーアークに置き換えた問題に容量スケール法を適用し, 区分変数の範囲を制限した問題に対する分枝限定法を組み込んだ解法である. また, 数値実験を行い, 提案した解法の有効性を示した.

基本モデルと強いモデルを用いた場合には相対的に大きな誤差をもつ解が得られたが, 拡張モデルを用いた場合には比較的誤差の小さい解を求めることができた. また, 従来法と異なり, すべての問題で実行可能解を求めることができ, かつ従来法よりも誤差の小さい解を求めることができた.

ノード数 100, アーク数 400, 品種数 30 の規模の問題では, 拡張モデルにおける定式化が大規模なものとなるため, 計算時間が 10 時間を超える場合があった. 今後の課題として, パスフローによる定式化と列生成法を組み合わせることなどによって, 問題の規模の縮小と計算時間の短縮化を行い, より大規模な問題に適用できる解法を開発することが挙げられる.

## 参考文献

- 1) T.G. Crainic, M. Gendreau, and J.M. Farvolden. A simplex-based tabu search for capacitated network design. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 12,

- pp. 223–236, 2000.
- 2) T.G. Crainic, B. Gendron, and G. Henu. A slope scaling/lagrangian perturbation heuristic with long-term memory for multicommodity capacitated fixed-charge network design. Technical Report CRT-2003-05, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 2003.
  - 3) K. L. Croxton, B. Gendron, and T. L. Magnanti. Variable disaggregation in network flow problems with piecewise linear costs. *Operations Research*, Vol. 55, pp. 146–157, 2007.
  - 4) B. Gendron and T.G. Crainic. Parallel implementations of bounding procedures for multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-94-45, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 1994.
  - 5) B. Gendron and T.G. Crainic. Relaxations for multicommodity capacitated network design problems. Technical Report CRT-965, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 1994.
  - 6) B. Gendron and T.G. Crainic. Bounding procedures for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. Technical Report CRT-96-06, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 1996.
  - 7) B. Gendron, T.G. Crainic, and A. Frangioni. Multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-98-14, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 1997.
  - 8) I. Ghamlouche, T.G. Crainic, and M. Gendreau. Path relinking for fixed-charge capacitated multicommodity network design. Technical Report CRT-2001-01, Centre de recherche sur les transports, Université de Montreal, 2002.
  - 9) I. Ghamlouche, T.G. Crainic, and M. Gendreau. Cycle based neighborhood structures for fixed-charge capacitated multicommodity network design. *Operations Research*, Vol. 51, pp. 655–667, 2003.
  - 10) K. Holmberg and D. Yuan. A lagrangian heuristic based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Research*, Vol. 48, pp. 461–481, 2000.
  - 11) 片山直登. 容量スケールリング法を用いた容量制約をもつ多品種フローネットワーク設計問題の近似解法. *流通経済大学流通情報学部紀要*, Vol. 9, No. 2, pp. 1–12, 2005.
  - 12) 片山直登. ネットワーク設計. 朝倉出版, 2008(予定).
  - 13) D. Kim and P.M. Pardalos. A dynamic domain contraction algorithm for nonconvex piecewise linear network flow problems. *Journal of Global Optimization*, Vol. 17, pp. 225–234, 2000.
  - 14) D. Kim and P.M. Pardalos. Dynamic slope scaling and trust interval techniques for solving concave piecewise linear network flow problems. *Networks*, Vol. 35, pp. 216–222, 2000.
  - 15) 久保幹雄. 数理計画ソルバーを用いたメタ解法. *システム/制御/情報*, Vol. 50, pp. 357–362, 2006.
  - 16) T. L. Magnanti and R. T. Wong. Network design and transportation planning : Models and algorithms. *Transportation Science*, Vol. 18, pp. 1–55, 1984.
  - 17) M. Minoux. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks*, Vol. 19, pp. 313–360, 1989.
  - 18) 陳明哲, 片山直登, 久保幹雄. 容量制約をもつ多品種フロー輸送ネットワーク設計問題に対する容量スケールリング法. *日本物流学会誌*, No. 14, pp. 85–92, 2006.