容量制約をもつネットワークデザイン問題の双対上昇法

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワークデザイン問題は，多品種フローを含むネットワークにおいて，適切なネットワークの形状を求める問題であり，通信ネットワーク設計，交通ネットワーク設計や輸送・配送ネットワーク設計などに様々な応用分野が存在している。交換機・コンピュータ，交差点・交通需要発生吸収点や配送センター・消費地などをノード，通信回線，道路や輸送経路などのノード間をつなぐものをアークとし，呼，データ，自動車や荷物などのノード間を流れるものを品種のフローと表現する。ネットワークデザイン問題は，アークに関するデザイン費用ともの流れに伴うルーティング費用を考慮して，適切なアークを選択する問題と定義される。これらに加え，現実的な問題では通信回線の容量，道路の交通容量や輸送能力のように，アークは単位時間当たりの処理能力に制限をもつ場合が多く，これらの処理能力を考慮した問題は容量制約をもつネットワークデザイン問題 *CND* とよばれている。

容量制約をもつネットワークデザイン問題に対しては数多くの研究がなされている。Magnanti－Mirchandani[12]は，ネットワークローディング問題に対する 3 分割不等式およびアーク剰余容量不等式を示している。Bienstock－Günlük[2]は多面体構造の解析を行い，Günlük[9]は Branch-Cut 法を提案している。片山－春日井[15]はカット制約を用いた双対上昇法を用いた解法を示し，片山－春日井[14]はフロー迂回条件を用いた妥当不等式を提案している。

一方，片山－春日井[15]はフロー保存条件に対する Lagrange 緩和法を使用している。Gendron－Crainic[5)6)7]および Gendron－Crainic－Frangioni[8]は，連続緩和，フロー保存条件 Lagrange 緩和，容量制約 Lagrange 緩和などとそれらの解法を示している。また，Herrmann－Ioannou－Minis[10]は，容量をもたないネットワークデザインに対する

Balakrishnan－Magnanti－Wong の双対上昇法[1]を拡張した解法を示しているが，誤りであることが示されている[4]。

また，*CND* に対する近似解法として，Gendron－Crainic[6)7)]は多品種フロー問題の解法である resoure　decomposition 法を利用した貪欲解法を示している。Crainic－Gendreau－Farvolden[3]は，シンプレックス法の基底解変更にタブーサーチ法を適用した近似解法を示しており，優れた解を導出している。Holmberg－Yuan[11]は Lagrange 緩和法と近似的な分枝限定法を用いた近似解法を示している。片山は[13]は貪欲的な Minoux タイプの近似解法を示している。

本研究では，容量制約をもたないネットワークデザイン問題の双対上昇法である Balakrishnan－Magnanti－Wong が示したラベリング法を容量制約をもつネットワークデザイン問題のために拡張した解法を提案する。

2　問題の定式化と双対問題

ノード集合を N，アーク候補集合を A，品種の集合を K と表す。ノード i, j 間のアーク (i, j) の有無を表すデザイン変数を y_{ij} とし，品種 k がアーク (i, j) 上を流れる比率を表すフロー変数を x_{ij}^k とする。すべてのアークの容量は同一とし，C で表す。アーク (i, j) のデザイン費用を f_{ij}，品種 k の全需要を流したときのルーティング費用を c_{ij}^k とする。品種 k の始点を O^k，終点を D^k，OD フロー量を d^k とする。このとき，*CND* の定式化は，次のように表される。

$$min \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{i\in N} x_{in}^k - \sum_{j\in N} x_{nj}^k = \begin{cases} -1 & if\ n = O^k \\ 1 & if\ n = D^k \\ 0 & otherwise \end{cases}$$
$$for\ \ all\ n\in N, k\in K \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K} d^k x_{ij}^k \le C y_{ij} \quad for\ \ all\ (i,j)\in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^k \le y_{ij} \quad for\ \ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{4}$$

$$y_{ij}\in\{0,1\} \quad for\ \ all\ (i,j)\in A \tag{5}$$

$$0\le x_{ij}^k \le 1 \quad for\ \ all\ k\in K,\ (i,j)\in A \tag{6}$$

(1)式は，ルーティング費用とデザイン費用の総和の最小化を表す。(2)式はフロー保存式である。(3)式は，アーク (i, j) が存在するときにのみフローの存在を許し，かつそ

のアークのフロー量は容量以下であることを表す。(4)式は，品種kがアーク(i, j)上を流れる比率がアーク(i, j)存在するときに最大1，存在しないとき0であることを表す。

(5)式の0－1条件を(7)式のように線形緩和した線形緩和問題LRPを作成する。

$$y_{ij} \geq 0 \quad for \ \ all \, (i,j) \in A \tag{7}$$

さらに，この線形緩和問題LRPの双対問題を作成する。(2)式のn，kに対する双対変数をv_n^k，(3)式の(i, j)に対する双対変数をs_{ij}，(4)式のk，(i, j)に対する双対変数をw_{ij}^kとする。このとき，線形緩和問題LRPの双対問題DPは次のように表される。

$$最小化 \quad \sum_{k \in K} (v_{D^k} - v_{O^k}) \tag{8}$$

$$条件 \quad v_j^k - v_i^k \leq c_{ij}^k + w_{ij}^k + d^k s_{ij} \quad for \ \ all \ \ k \in K, (i,j) \in A \tag{9}$$

$$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} \leq f_{ij} \quad for \ \ all \, (i,j) \in A \tag{10}$$

$$w_{ij}^k \geq 0 \quad for \ \ all \ \ k \in K, (i,j) \in A \tag{11}$$

$$s_{ij} \geq 0 \quad for \ \ all \, (i,j) \in A \tag{12}$$

この双対問題DPの実行可能解の目的関数値は，元の問題CNDの下界値となる。

3　双対変数の性質

双対問題DPにおいて，実行可能な$\tilde{w}$と$\tilde{s}$が与えられた場合，この問題はアーク(i, j)の長さを$c_{ij}^k + \tilde{w}_{ij}^k + d^k \tilde{s}_{ij}$とした品種$k$毎の最短路問題の双対問題をあわせたものになる。また，目的関数は品種kのO^k，D^k間の最短距離の総和となる。

$\boldsymbol{s}$の実行可能解$\tilde{s}$が与えられた場合，$\tilde{c}_{ij}^k := c_{ij}^k + d^k \tilde{s}_{ij} (\forall k, (i,j)), \tilde{f}_{ij} := f_{ij} - C\tilde{s}_{ij} (\forall (i,j))$とおけば，双対問題$DP$は次のように表される。

$$最小化 \quad \sum_{k \in K} (v_{D^k} - v_{O^k})$$

$$条件 \quad v_j^k - v_i^k \leq \tilde{c}_{ij}^k + w_{ij}^k \quad for \ \ all \ \ k \in K, (i,j) \in A$$

$$\sum_{k \in K} w_{ij}^k \leq \tilde{f}_{ij} \quad for \ \ all \, (i,j) \in A$$

$$w_{ij}^k \geq 0 \quad for \ \ all \ \ k \in K, (i,j) \in A$$

この問題は容量制約をもたないネットワークデザイン問題の双対問題に一致する。そのため，この双対問題に対しては，効率的なBalakrishnan－Magnanti－Wongが示したラ

ベリング法[1)](付録参照)を適用することができる。

ここで，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{s}$ の実行可能解 $\tilde{v}$ と $\tilde{s}$ が与えられているものとする。また，$\boldsymbol{w}$ の実行可能解 $\tilde{w}$ はラベリング法のイテレーション中に求められているものとする。

このとき，実行可能である条件のもとに，$\tilde{s}$ を増加させ，$\tilde{w}$ を減少させることを考える。ここで，次のような *LRP* と *DP* の間の相補性条件を考える。

$$
\begin{aligned}
y_{ij}\,(f_{ij}-\sum_{k\in K} w_{ij}^{k}-Cs_{ij}) &= 0 \ \ for\ all\ (i,j)\in A\\
(y_{ij}-x_{ij}^{k})w_{ij}^{k} &= 0 \ \ for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A\\
x_{ij}^{k}\,(c_{ij}^{k}+w_{ij}^{k}+d^{k}s_{ij}-v_{j}^{k}+v_{i}^{k}) &= 0 \ \ for\ all\ k\in K,\ (i,j)\in A\\
(Cy_{ij}-\sum_{k\in K} d^{k}x_{ij}^{k})\,s_{ij} &= 0 \ \ for\ all\ (i,j)\in A
\end{aligned}
$$

これらの相補性条件から，双対問題 *DP* の最適解において $f_{ij}-\sum_{k\in K} w_{ij}^{k}-Cs_{ij}=0,\ w_{ij}^{k}>0$ かつ $c_{ij}^{k}+w_{ij}^{k}+d^{k}s_{ij}-v_{j}^{k}+v_{i}^{k}=0$ であれば，主問題 *LRP* の最適解において $x_{ij}^{k}>0$ である可能性がある。また，$Cy_{ij}-\sum_{k\in K} d^{k}x_{ij}^{k}>0$ であれば $s_{ij}=0$ である。

ここで，あるアーク$(i,\ j)$について，$K_{ij}=\{k\mid c_{ij}^{k}+\tilde{w}_{ij}^{k}+d^{k}\tilde{s}_{ij}-\tilde{v}_{j}^{k}+\tilde{v}_{i}^{k}=0,\ \tilde{w}_{ij}^{k}>0,\ for\ all\ k\in K\}$とおく。$\sum_{k\in K_{ij}} d^{k}\geq C$ であるとき，$\sum_{k\in K, x_{ij}^{k}=1} d^{k}=\sum_{k\in K} d^{k}x_{ij}^{k}\geq C$ と想定する。このとき，容量制約を満足していない可能性があり，容量制約を満足させるために対応する双対変数 s_{ij} の値を増加させることにする。以後，$\sum_{k\in K_{ij}} d^{k}\geq C$ であるアーク(i,j)を対象として話を進める。

ラベリング法の途中において，ある w_{ij}^{k} を0から増加させると，K_{ij} の要素数が増加することになり，$\sum_{k\in K_{ij}} d^{k}<C$ から $\sum_{k\in K_{ij}} d^{k}\geq C$ となったとする。s_{ij} を $\tilde{s}_{ij}$ から s'_{ij} に増加させ，$w_{ij}^{k}\ (k\in K)$ を $\tilde{w}_{ij}^{k}$ から w'^{k}_{ij} に減少させることにする。そこで，

$$
\begin{aligned}
\Delta_{ij} &= min\{\tilde{w}_{ij}^{k}/d^{k}\mid k\in K_{ij}\}\\
s'_{ij} &= \tilde{s}_{ij}+\Delta_{ij}\\
w'^{k}_{ij} &= \begin{cases}\tilde{w}_{ij}^{k}-d^{k}\Delta_{ij} & if\ k\in K_{ij}\\ \tilde{w}_{ij}^{k} & otherwise\end{cases}
\end{aligned}
$$

とおく。ここで，$\Delta_{ij}\geq 0$ である。

$\tilde{w}$ と $\tilde{s}$ は非負であるため *DP* の実行可能解であり，$\sum_{k\in K_{ij}} d^{k}\geq C$ を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in K} w'^{k}_{ij}+Cs'_{ij} &= \sum_{k\in K_{ij}}(\tilde{w}_{ij}^{k}-d^{k}\Delta_{ij})+\sum_{k\in K\backslash K_{ij}}\tilde{w}_{ij}^{k}+C\,(\tilde{s}_{ij}+\Delta_{ij})\\
&= \sum_{k\in K}\tilde{w}_{ij}^{k}+C\tilde{s}_{ij}+\Delta_{ij}\,(C-\sum_{k\in K_{ij}} d^{k})\leq\sum_{k\in K}\tilde{w}_{ij}^{k}+C\tilde{s}_{ij}\leq f_{ij}
\end{aligned}
$$

となる。加えて，$s'_{ij} \geq 0$ と $w'^{k}_{ij} \geq 0 (\forall k \in K)$ より，s'_{ij} と $w'^{k}_{ij} (\forall k \in K)$ は DP の実行可能解となる。

また，$\tilde{w}^{k}_{ij}$ と $\tilde{s}_{ij}$ に対する(10)式のスラック変数を $\tilde{F}_{ij}$，w'^{k}_{ij} と s'_{ij} に対するスラック変数を F'_{ij} とおくと，

$$
\begin{aligned}
F'_{ij} = f_{ij} - \sum_{k \in K} w'^{k}_{ij} - Cs'_{ij} &= f_{ij} - \sum_{k \in K} \tilde{w}^{k}_{ij} - C\tilde{s}_{ij} + \Delta_{ij} \left(\sum_{k \in K_{ij}} d^{k} - C \right) \\
&= \tilde{F}_{ij} + \Delta_{ij} \left(\sum_{k \in K_{ij}} d^{k} - C \right) \geq \tilde{F}_{ij}
\end{aligned}
$$

となり，(10)式のスラック変数は非減少である。

一方，品種 $k\ (\in K_{ij})$ に対して，

$$
c^{k}_{ij} + w'^{k}_{ij} + d^{k} s'_{ij} = c^{k}_{ij} + \tilde{w}^{k}_{ij} - d^{k} \Delta_{ij} + d^{k} (\tilde{s}_{ij} + \Delta_{ij}) = c^{k}_{ij} + \tilde{w}^{k}_{ij} + d^{k} \tilde{s}_{ij}
$$

であり，$k\ (\in K \backslash K_{ij})$ に対して，

$$
c^{k}_{ij} + w'^{k}_{ij} + d^{k} s'_{ij} = c^{k}_{ij} + \tilde{w}^{k}_{ij} + d^{k} \tilde{s}_{ij} + d^{k} \Delta_{ij} \geq c^{k}_{ij} + \tilde{w}^{k}_{ij} + d^{k} \tilde{s}_{ij}
$$

となる。したがって，いずれの場合でも

$$
\tilde{v}^{k}_{j} - \tilde{v}^{k}_{i} \leq c^{k}_{ij} + \tilde{w}^{k}_{ij} + d^{k} \tilde{s}_{ij} \leq c^{k}_{ij} + w'^{k}_{ij} + d^{k} s'_{ij}
$$

が成り立つ。したがって，$\tilde{\boldsymbol{v}}$，$\boldsymbol{w}'$ および $\boldsymbol{s}'$ は双対問題 DP の実行可能解となる。

一方，Δ_{ij} を用いて $\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{s}$ を変化させたときに，アークの長さである $c^{k}_{ij} + w^{k}_{ij} + d^{k} s_{ij}$ が増加(非減少)することになる。このため，最短距離である LRP の目的関数値，すなわち CND の下界値が増加することが期待できる。また，スラック変数 F_{ij} も増加(非減少)するため，ラベリング法によってさらに $\boldsymbol{w}$ を増加できる可能性があり，この結果，CND の下界値を増加できることが期待できる。

4　双対上昇法

容量制約をもたないネットワークデザイン問題に対するラベリング法に，前節で示した $\boldsymbol{w}$ および $\boldsymbol{s}$ の性質を組み込んだ双対上昇法を示す。

ステップ 0　$w^{k}_{ij} := 0$ *for all* $k \in K,\ (i, j) \in A,$

$s_{ij} := 0$ *for all* $(i, j) \in A,$

v_i^k :=“アーク(i,j)の長さを c_{ij}^k としたネットワーク上における始点 O^k からノード i までの最短距離” *for all* $i \in N, k \in K,$

$F_{ij} := f_{ij}$ *for all* $(i,j) \in A,$

$z_0 := \sum_{k \in K} (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k),$

$m := 1.$

ステップ 1 $N_1(k) := N \backslash \{D^k\}$ *for all* $k \in K,$

$N_2(k) := \{D^k\}$ *for all* $k \in K,$

$CANDIDATES := \{k \in K \mid O^k \in N_1(k)\},$

$z_m := z_{m-1}.$

ステップ 2 $k \in CANDIDATES,$

$A(k) := \{(i,j) \mid i \in N_1(k),\ j \in N_2(k)\}.$

ステップ 3 $A'(k) := \{(i,j) \mid c_{ij}^k + w_{ij}^k + d^k s_{ij} - (v_j^k - v_i^k) = 0,\ (i,j) \in A(k)\},$

$\delta_1 := min\{F_{ij} \mid (i,j) \in A'(k)\},$

$\delta_2 := min\{c_{ij}^k + w_{ij}^k + d^k s_{ij} - (v_j^k - v_i^k) \mid (i,j) \in A(k) \backslash A'(k)\},$

$\delta := min(\delta_1, \delta_2).$

ステップ 4 $w_{ij}^k := w_{ij}^k + \delta$ *for all* $(i,j) \in A'(k),$

$F_{ij} := F_{ij} - \delta$ *for all* $(i,j) \in A'(k),$

$v_n^k := v_n^k + \delta$ *for all* $n \in N_2(k),$

$z_m := z_m + \delta,$

$K_{ij} = \{n \mid c_{ij}^n + w_{ij}^n + d^n s_{ij} - (v_j^n + v_i^n) = 0,\ w_{ij}^k > 0,\ n \in K\}$ *for all* $(i,j) \in A(k).$

ステップ 5 $\sum_{n \in K_{ij}} d^n \geq C$ であるすべてのアーク $(i,j)(\in A(k))$ に対して

$\Delta_{ij} := min_{n \in K_{ij}} \{w_{ij}^n / d^n\},$

$w_{ij}^n := w_{ij}^n - d^n \Delta_{ij}$ *for all* $n \in K_{ij},$

$s_{ij} := s_{ij} + \Delta_{ij},$

$F_{ij} := F_{ij} + \Delta_{ij} (\sum_{k \in K_{ij}} d^k - C).$

ステップ 6 $\delta = \delta_1$ であれば，$F_{ij} = 0$ かつ $(i,j) \in A'(k)$ であるノード i を i^* とし，

$N_1(k) := N_1(k) \backslash \{i^*\},$

$N_2(k) := N_2(k) \cup \{i^*\},$

ステップ7　$CANDIDATES := CANDIDATES \backslash \{k\}$ とし，$CANDIDATES \neq \phi$ であればステップ2へ戻る。

ステップ8　すべての品種 k に対して，$O^k \in N_2(k)$ であればステップ9へ，そうでなければ $CANDIDATES := \{k \in K \mid O^k \in N_1(k)\}$ として，ステップ2へ戻る。

ステップ9　$z_m = z_{m-1}$ であれば終了，そうでなければ $m := m-1$ として，ステップ1へ戻る。

容量制約のない問題に対するラベリング法と比べると次の点が加えられている。ステップ4の最終項では，K_{ij} を求めている。ステップ5では，s_{ij} の変化量である Δ_{ij} を求め，w_{ij}^n，s_{ij} および F_{ij} を更新している。さらに，z_m を m 回目のラベリング法の繰り返しにおける目的関数値として，ステップ9において z_m が増加する限りラベリング法を繰り返している。

5　双対上昇法の数値例

簡単な数値例を用いて，提案した双対上昇法を説明する。

$K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，$w_{ij}^1 = 10$，$w_{ij}^2 = 6$，$w_{ij}^3 = w_{ij}^4 = w_{ij}^5 = 0$，$K_{ij} = \{1, 2\}$ とし，$d^1 = d^2 = d^5 = 1$，$d^3 = 2$，$d^4 = 4$，$c_{ij}^k = 0\,(\forall k \in K)$，$C = 4$，$f_{ij} = 26$，$s_{ij} = 0$ とする。$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} = 16 \leq f_{ij} = 26$，$F_{ij} = 10$ である。

ここで，w_{ij}^3 が0から8に増加し，3が K_{ij} に含まれたとする。$K_{ij} = \{1,2,3\}$，$\sum_{k \in K_{ij}} d^k = 4 \geq C$，$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} = 24 \leq f_{ij} = 26$，$F_{ij} = 2$ となる。このとき，$w_{ij}^1/d^1 = 10$，$w_{ij}^2/d^2 = 6$，$w_{ij}^3/d^3 = 4$ であるので，$\Delta_{ij} = 4$ なる。したがって，$w_{ij}^1 = 10-4 = 6$，$w_{ij}^2 = 2$，$w_{ij}^3 = 8-2\times 4 = 0$，$w_{ij}^4 = w_{ij}^5 = 0$，$s_{ij} = 0+4 = 4$，$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} = 6+2+4\times 4 = 24 \leq f_{ij} = 26$，$F_{ij} = 2$，$K_{ij} = \{1, 2\}$ となる。s_{ij} を増加させる前後で，アークの長さ $c_{ij}^k + w_{ij}^k + d^k s_{ij}$ は次のように変化する。

$$c_{ij}^1 + w_{ij}^1 + d^1 s_{ij} = 10 \to 10,\ c_{ij}^2 + w_{ij}^2 + d^2 s_{ij} = 6 \to 6,$$
$$c_{ij}^3 + w_{ij}^3 + d^3 s_{ij} = 8 \to 8,\ c_{ij}^4 + w_{ij}^4 + d^4 s_{ij} = 0 \to 16,$$
$$c_{ij}^5 + w_{ij}^5 + d^5 s_{ij} = 0 \to 4$$

次に，w_{ij}^4 が0から2に増加し，4が K_{ij} に含まれたとする。$K_{ij} = \{1, 2, 4\}$，$\sum_{k \in K_{ij}} d^k = 6 \geq C$，$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} = 26 \leq f_{ij} = 26$，$F_{ij} = 0$ となる。このとき，$w_{ij}^1/d^1 = 6$，$w_{ij}^2/d^2 = 2$，$w_{ij}^4/d^4 = 0.5$，であるので，$\Delta_{ij} = 0.5$ となる。したがって，$w_{ij}^1 = 5.5$，$w_{ij}^2 = 1.5$，$w_{ij}^3 = w_{ij}^4 = w_{ij}^5 = 0$，$s_{ij} = 4+0.5 = 4.5$，$\sum_{k \in K} w_{ij}^k + Cs_{ij} = 24 \leq f_{ij} = 25$，$F_{ij} = 0+0.5\times 2 = 1$ となる。s_{ij} を増加させ

る前後で，アークの長さ $c_{ij}^k + w_{ij}^k + d^k s_{ij}$ は次のように変化する。

$$c_{ij}^1 + w_{ij}^1 + d^1 s_{ij} = 10 \to 10,\ c_{ij}^2 + w_{ij}^2 + d^2 s_{ij} = 6 \to 6,$$
$$c_{ij}^3 + w_{ij}^3 + d^3 s_{ij} = 8 \to 9,\ c_{ij}^4 + w_{ij}^4 + d^4 s_{ij} = 16 \to 18,$$
$$c_{ij}^5 + w_{ij}^5 + d^5 s_{ij} = 4 \to 4.5$$

以上のように，ラベリング法のステップ5によって，各アークの長さが増加し，かつスラック変数値が増加することが分かる。

6　おわりに

本研究では，容量制約のないネットワークデザイン問題の双対上昇法であるラベリング法を容量制約をもつネットワークデザイン問題に対して拡張した解法である双対上昇法を提案した。提案した解法によって，容量制約のない問題に対する双対解を改良することによって，目的関数値である下界値を上昇できることを示した。

本研究では，双対上昇法を提案し，この解法の理論的な側面を解説した。しかしながら，提案した解法の有効性を示すためには，提案した解法に対する数値実験，および他の解法と比較実験を行うことが必要である。また，双対解をもとにした効率的な近似解法を開発することも必要である。

A　付録：容量制約をもたないネットワークデザイン問題に対するラベリング法

ステップ1 $w_{ij}^k := 0$ *for all* $k \in K,\ (i,j) \in A,$

$v_{ij}^k :=$ “アーク (i,j) の長さを c_{ij}^k としたネットワーク上における始点 O^k からノード i までの最短距離” *for all* $i \in N,\ k \in K,$

$F_{ij} := f_{ij}$ *for all* $(i,j) \in A,$

$N_1(k) := N \setminus \{D^k\}$ *for all* $k \in K,$

$N_2(k) := \{D^k\}$ *for all* $k \in K,$

$z := \sum_{k \in K} (v_{D^k}^k - v_{O^k}^k),$

$CANDIDATES := \{k \in K \mid O^k \in N_1(k)\}.$

ステップ2 $k \in CANDIDATES,$

$A(k) := \{(i,j) \mid i \in N_1(k),\ j \in N_2(k)\},$

ステップ3 $A'(k) := \{(i,j) \mid c_{ij}^k + w_{ij}^k - (v_j^k - v_i^k) = 0,\ (i,j) \in A(k)\},$

$\delta_1 := min\{F_{ij} | (i,j) \in A'(k)\}$,

$\delta_2 := min\{c_{ij}^k + w_{ij}^k - (v_j^k - v_i^k) | (i,j) \in A(k) \setminus A'(k)\}$,

$\delta := min\ (\delta_1, \delta_2)$.

ステップ4 $w_{ij}^k := w_{ij}^k + \delta$ *for all* $(i, j) \in A'(k)$,

$F_{ij} := F_{ij} - \delta$ *for all* $(i, j) \in A'(k)$,

$v_n^k := v_n^k + \delta$ *for all* $n \in N_2(k)$,

$z := z + \delta$.

ステップ5 $\delta = \delta_1$ であれば，$F_{ij} = 0$ かつ $(i,j) \in A'(k)$ であるノード i を i^* とし，

$N_1(k) := N_1(k) \setminus \{i^*\}$,

$N_2(k) := N_2(k) \cup \{i^*\}$.

ステップ6 $CANDIDATES := CANDIDATES \setminus \{k\}$ とし，$CANDIDATES \neq \phi$ であればステップ2へ戻る。

ステップ7 すべての品種 k に対して，$O^k \in N_2(k)$ であれば終了，そうでなければ $CANDIDATES := \{k \in K \mid O^k \in N_1(k)\}$ として，ステップ2へ戻る。

参考文献

[1] A. Balakrishnan, T. Magnanti, and R. Wong. A dual-ascent procedure for large-scale uncapacitated network design. *Operations Research*, Vol. 37, pp.716-740,1989.

[2] D. Bienstock and O. Günlük. Capacitated network design - polyhedral structure and computation. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 8, pp.243-259,1996.

[3] T.G. Crainic, M. Gendreau, and J.M. Farvolden. A simplex-based tabu search for capacitated network design. *INFORMS Journal on Computing*, Vol. 12, pp.223-236,2000.

[4] B. Gendron. A note on "a dual-ascent approach to the fixed-charge capacitated network design problem". Technical Report CRT-99-38, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1999.

[5] B. Gendron and T.G. Crainic. Parallel implementations of bounding procedures for multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-94-45, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1994.

[6] B. Gendron and T.G. Crainic. Relaxations for multicommodity capacitated network design problems. Technical Report CRT-965, Centre de recherche sur les transports,

Universite de Montreal, 1994.

[7] B. Gendron and T.G. Crainic. Bounding procedures for multicommodity capacitated fixed charge network design problems. Technical Report CRT-96-06, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1996.

[8] B. Gendron, T.G. Crainic, and A. Frangioni. Multicommodity capacitated network design. Technical Report CRT-98-14, Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal, 1999.

[9] O. Günlük. A branch-and-cut algorithm for capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp.17-39, 1999.

[10] J. W. Herrmann, G. Ioannou, and I. Minis. A dual ascent approach to the fixed-charge capacitated network design problem. *European Journal of Operational Research*, Vol. 95, pp.476-490, 1996.

[11] K. Holmberg and D. Yuan. A lagrangian heuristic based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Reserach*, Vol. 48, pp.461-481, 2000.

[12] T. Magnanti, P. Mirchandani, and R. Vachani. The convex hull of two core capacitated network design problems. *Mathematical Programming*, Vol. 60, pp.233-250, 1993.

[13] 片山直登. 容量制約をもつネットワークデザイン問題の貪欲解法. 流通経済大学流通情報学部紀要, Vol. 6, No. 1, pp.57-67, 2001.

[14] 片山直登，春日井博. 容量制約付きネットワークデザイン問題の強い妥当不等式. 日本経営工学会秋季研究大会予稿集, pp.281-282,1992.

[15] 片山直登，春日井博. 容量制約をもつ多品種流ネットワークデザイン問題. 日本経営工学会誌，Vol. 44, pp.164-175, 1993.